Année universitaire 2014/2015

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet de : ☐ 1$^{\text{er}}$ semestre ☒ 2$^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h

Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence de Mathématiques

Code du module : SMI2U2TL Libellé du module : Algèbre Linéaire 1

Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1

i) Trouver l'inverse (s'il existe) de la matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} -x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et soit $f : E \to F$ une application linéaire.

iii) Montrer que le noyau et l'image de f sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E et de F.

iv) On suppose f injective. Montrer que si $\{x_1, ..., x_p\}$ est une famille libre de E, alors $\{f(x_1), ..., f(x_p)\}$ est une famille libre de F.

Exercice 2

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, -x - y, 0)$.

i) Montrer que f est linéaire.

ii) Déterminer le noyau et l'image de f (bases et dimensions).

iii) L'application f est elle injective ? surjective ?

iv) Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\}$ un sous-espace de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker} f \oplus E$.

Exercice 3

On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x, y, z) = (x - y + 2z, -2x + y - 3z, -x + y - 2z)$$

i) Donner la matrice A de f relativement à la base B.

ii) Soit $u = (1, 1, 0)$. Calculer $f(u), f^2(u), f^3(u)$ (rappel : $f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f$).

iii) Montrer que $B' = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

iv) Écrire la matrice A' de f dans la base B'.

v) Donner la matrice P de passage de la base B à la base B' puis calculer P^{-1}.

vi) Donner la relation entre A, A' et P. Utiliser celle-ci pour vérifier la réponse à la question iv).

vii) Échelonner la matrice A et en déduire le rang de f.

viii) Donner les dimensions du noyau et de l'image de f puis déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et une base de $\mathrm{Im} f$.

ix) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

Exercice 4

On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3. On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est la famille de polynômes : $(1, X, X^2, X^3)$.

Soient u et v les applications définies sur $\mathbb{R}_3[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad u(P) = P(X+1) \text{ et } v(P) = P(X-1).$$

i) Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$. Montrer que

$$u(P) = a + b + c + d + (b + 2c + 3d)X + (c + 3d)X^2 + dX^3$$

et calculer $v(P)$.

ii) Montrer que u est linéaire ; on admettra que v l'est aussi.

iii) Montrer que les applications u et v sont inverses l'une de l'autre.

iv) Donner U et V, matrices respectivement de u et v dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

v) Vérifier que U et V sont inverses l'une de l'autre.