Aix-Marseille Université 2014-2015

Analyse 1

DEVOIR DE CONTRÔLE CONTINU 1

Vendredi 13 février 2015

Durée : deux heures. Aucun document autorisé. Calculettes interdites.

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.

Exercice 1

1. Donner la définition :
   (a) d'une suite bornée ;
   (b) d'une suite tendant vers $-\infty$.
2. Montrer, en revenant à la définition, que :
   (a) la suite $\left(\frac{1-2\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -2 ;
   (b) la suite $\left(\ln(1+n^2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
3. Montrer que :
   (a) toute suite décroissante est majorée ;
   (b) la somme d'une suite convergeant vers un réel et d'une suite tendant vers $+\infty$ est une suite qui tend vers $+\infty$.

Exercice 2

1. Déterminer, en justifiant vos réponses, si les suites suivantes sont croissantes ou décroissantes :
   (a) $u_n = 2n + \sin(n), \forall n \in \mathbb{N}$.
   (b) $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(k+1)^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) $w_0 = 16$ et $w_{n+1} = \sqrt{w_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer, en justifiant vos réponses, si les suites suivantes sont bornées :
   (a) $u_n = 2n + \sin(n), \forall n \in \mathbb{N}$.
   (b) $v_n = 4\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + 3(-1)^n - \dfrac{2}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer, en justifiant vos réponses, si les suites suivantes sont convergentes :
   (a) $u_n = \dfrac{(\cos(n) - 2)}{n^4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) $v_n = \dfrac{3n + 5(-1)^n}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
   (c) $w_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) $z_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3

Soient u_0 et u_1 deux nombres réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_{n+2} := \frac{u_n + u_{n+1}}{2} \quad \text{et} \quad v_n := u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n.$$

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Que peut-on en déduire sur la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Donner une relation entre u_n et u_{n+1} satisfaite pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.
4. En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.