Université Aix-Marseille 2014–2015

Licence Maths-Info - **Analyse I**

Corrigé du devoir surveillé n° 1

Exercice 1.

1. (a) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ssi : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \le M$.

   (b) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ ssi : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \ge N \Rightarrow u_n < A$.

2. (a) On fixe $\varepsilon > 0$ et on pose $N = \left\lfloor \left(\frac{3}{\varepsilon} - 1\right)^2 \right\rfloor + 1$. Pour tout entier $n \ge N$, on a alors

$$\begin{aligned} n \ge \left\lfloor \left(\frac{3}{\varepsilon} - 1\right)^2 \right\rfloor + 1 > \left(\frac{3}{\varepsilon} - 1\right)^2 \quad & \Rightarrow \quad \sqrt{n} > \left|\frac{3}{\varepsilon} - 1\right| \text{ car la fonction racine croit sur } \mathbb{R}_+ \\ & \Rightarrow \quad \sqrt{n} > \frac{3}{\varepsilon} - 1 \;\Rightarrow\; 1 + \sqrt{n} > \frac{3}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \frac{1}{1+\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{3} \text{ car } \frac{3}{\varepsilon} > 0 \\ & \Rightarrow \quad \left|\frac{1-2\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} - (-2)\right| = \left|\frac{1-2\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} + \frac{2+2\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right| = \frac{3}{1+\sqrt{n}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

   On a bien montré que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ au-delà duquel on a $\left|\frac{1-2\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} - (-2)\right| < \varepsilon$.

   (b) On fixe $A \in \mathbb{R}$ et on pose $N = \left\lfloor \sqrt{|e^A - 1|} \right\rfloor + 1$. Pour tout entier $n \ge N$, on a alors

$$\begin{aligned} n \ge \left\lfloor \sqrt{|e^A - 1|} \right\rfloor + 1 > \sqrt{|e^A - 1|} \quad & \Rightarrow \quad n^2 > |e^A - 1| \;\Rightarrow\; n^2 > e^A - 1 \;\Rightarrow\; 1 + n^2 > e^A \\ & \Rightarrow \quad \ln(1+n^2) > A \text{ car la fonction ln est croissante sur } \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

   On a bien montré que, pour tout réel $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ au-delà duquel on a $\ln(1+n^2) > A$.

3. (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante. On veut montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le M$. Puisque la suite estdécroissante, il suffit de prendre $M = u_0$.

   (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $+\infty$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on sait qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < 1$, et donc $u_n > \ell - 1$ pour tout $n \ge N_1$.
   Fixons maintenant $A \in \mathbb{R}$. On a alors $A - \ell + 1 \in \mathbb{R}$, et puisque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$, on sait qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $v_n > A - \ell + 1$ pour tout $n \ge N_2$. En posant $N = \max(N_1, N_2)$, on a donc, pour tout $n \ge N$, $u_n + v_n > A - \ell + 1 + \ell - 1 = A$.
   On a bien montré que, pour tout réel $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ au-delà duquel on a $u_n + v_n > A$.

Exercice 2.

1. (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. En effet pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sin(n) &< 1 \\ \Rightarrow 2n + \sin(n) &< 2n + 1 \\ \Rightarrow 2n + \sin(n) &< 2(n+1) + \sin(n+1) \text{ car } 1 < 2 + \sin(n+1) \\ \Rightarrow u_n &< u_{n+1}. \end{aligned}$$

(b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. En effet pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1}-v_n & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{3}{(k+1)^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{(k+1)^2} \\ & = & \displaystyle\frac{3}{(n+2)^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{(k+1)^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{(k+1)^2} \\ & = & \displaystyle\frac{3}{(n+2)^2} \\ & > 0 & . \end{array}$$

(c) En calculant les premiers termes de la suite ($w_1 = 4$, $w_2 = 2$, $w_3 = \sqrt{2}$), on s'aperçoit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble strictement décroissante. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} < w_n.$$

Initialisation : on a $w_1 = 4 < 16 = w_0$ la propriété est donc vraie au rang 0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons la propriété vraie au rang n, c'est à dire que $w_{n+1} < w_n$ et montrons qu'elle reste au vraie au rang $n+1$, à savoir : $w_{n+2} < w_{n+1}$. Comme la fonction racine carrée est strictement croissante, on a

$$w_{n+2} = \sqrt{w_{n+1}} < \sqrt{w_n} = w_{n+1},$$

ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$ et achève la démonstration par récurrence.
Conclusion : la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

2. (a)

$$\begin{array}{rcl} \forall n\in\mathbb{N},\ \text{on a} \quad -1 & < & \sin(n) \\ \Rightarrow 2n-1 & < & 2n+\sin(n) \\ \Rightarrow -1 & < & u_n \end{array}$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -1. Montrons qu'elle ne peut être majorée en raisonnant par l'absurde : supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n \leqslant M \Rightarrow 2n+\sin(n) \leqslant M \Rightarrow n \leqslant \frac{M-\sin(n)}{2} \Rightarrow n \leqslant \frac{M+1}{2}.$$

Ainsi, pour $n = E[\frac{M+1}{2}]+1$, on a

$$E[\frac{M+1}{2}]+1 \leqslant \frac{M+1}{2},$$

ce qui est absurde car

$$\forall x \in \mathbb{R}, x < E[x]+1 \text{ et donc } \frac{M+1}{2} < E[\frac{M+1}{2}]+1.$$

L'hypothèse de départ est donc fausse et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas majorée.

(b)

$$\begin{array}{rccl} \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \text{on a} \quad -4 \leqslant & 4\cos(\frac{\pi}{n}) & < 4, \\ -3 \leqslant & 3(-1)^n & \leqslant 3, \\ -1 \leqslant & -\dfrac{2}{n+1} & < 0, \end{array}$$

de cette façon en sommant ces inégalités, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-8 \leqslant v_n < 7$, et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bornée.

3. (a)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } \quad -1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$
$$\Rightarrow \quad -3 \leqslant \cos(n) - 2 \leqslant -1$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{3}{n^4} \leqslant \frac{(\cos(n)-2)}{n^4} \leqslant -\frac{1}{n^4}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{3}{n^4} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^4} = 0$, en utilisant le théorème des gendarmes on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(b)

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{3n+5(-1)^n}{2n+1} &= \frac{3n}{2n+1} + \frac{5(-1)^n}{2n+1} \\ &= \frac{3}{2(1+\frac{1}{n})} + \frac{5(-1)^n}{2n+1}\end{aligned}$$

D'une part, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2(1+\frac{1}{n})} = \frac{3}{2}$. D'autre part, comme $(-1)^n$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{2n+1} = 0$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5(-1)^n}{2n+1} = 0$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{2}$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n}) = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$.

Comme $(-1)^n$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. En revanche $(-1)^n$ n'admet pas de limite, montrons que c'est aussi le cas de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On considère les sous-suites de rangs pairs et impairs, respectivement $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} w_{2n} &= (-1)^{2n} + \frac{(-1)^{2n}}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1, \\ w_{2n+1} &= (-1)^{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1.\end{aligned}$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet donc deux sous suites qui convergent vers des limites différentes, elle n'est donc pas convergente.

(d)

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_n &= \frac{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{(\sqrt{2n+1})^2-(\sqrt{2n-1})^2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{2n+1-(2n-1)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Exercice 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} = u_{n+2} + \frac{u_{n+1}}{2} = \frac{u_n+u_{n+1}}{2} + + \frac{u_{n+1}}{2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{2} = v_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante, égale à $v_0 = u_1 + \frac{u_0}{2}$.
2. D'après la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + \frac{u_n}{2} = v_0$, et donc $u_{n+1} = v_0 - \frac{u_n}{2}$.

3. On cherche α et r, deux réels, tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} - \alpha = r(u_n - \alpha)$. D'après la question précédénte, cela donnerait

$$v_0 - \frac{u_n}{2} - \alpha = r(u_n - \alpha) \Leftrightarrow \frac{2r+1}{2} u_n = v_0 + (r-1)\alpha,$$

ce qui est satisfait si $2r + 1 = 0$ et $v_0 + (r-1)\alpha = 0$, autrement dit, si $r = -\frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{2v_0}{3}$. Réciproquement, en posant $\alpha = \frac{2v_0}{3}$, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \alpha = v_0 - \frac{u_n}{2} - \frac{2v_0}{3} = \frac{v_0}{3} - \frac{u_n}{2} = \frac{1}{2}(\alpha - u_n) = -\frac{1}{2}(u_n - \alpha).$$

4. La suite $(u_n - \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \alpha)$, et donc

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{2^n}(u_0 - \alpha) + \alpha = \frac{(-1)^n}{2^n}\left(u_0 - \frac{2v_0}{3}\right) + \frac{2v_0}{3} = \frac{(-1)^n}{2^n}\left(u_0 - \frac{2u_1 + u_0}{3}\right) + \frac{2u_1 + u_0}{3} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{2(u_0 - u_1)}{3} + \frac{2u_1 + u_0}{3} = \frac{(-1)^n(u_0 - u_1)}{3.2^{n-1}} + \frac{2u_1 + u_0}{3}. \end{aligned}$$

5. D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la somme d'une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de la suite constante égale à $\frac{2u_1 + u_0}{3}$. Puisque $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, la première converge vers 0, et la seconde converge trivialement vers $\frac{2u_1 + u_0}{3}$. Par somme de suites convergentes, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{2u_1 + u_0}{3}$.