Université Aix-Marseille 2014–2015

Licence Maths-Info - **Analyse I**

Corrigé du devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2

Exercice 1.

1. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in]A, +\infty[, |f(x)| < \varepsilon$.
2. $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in]1-\eta, 1+\eta[, |f(x) - 3| \geq \varepsilon$.
3. $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in]B, +\infty[, f(x) > A$.

Exercice 2.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on a $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)x} = \frac{x+1}{x}$. Or $(x \mapsto x+1)$ et $(x \mapsto x)$ sont toutes les deux des polynômes, donc définies et continues sur $\mathbb{R}$. Elles admettent donc des limites égales à leurs évaluations en tout point.

Par quotient de limites ne s'annulant pas, on a donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{1+1}{1} = 2$. On peut donc prolonger par continuité la fonction f en 1 avec $f(1) = 2$.

Par quotient d'une limite strictement positive et d'une limite nulle par valeurs positives, on a donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+1}{x} = +\infty$. La fonction f ne peut donc pas être prolongée par continuité en 0. Et par ailleurs, par quotient d'une limite strictement positive et d'une limite nulle par valeurs négatives, on a même $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \neq +\infty$; la fonction f n'admet donc même pas de limite en 0.

Exercice 3.

1. Pour tout nombre réel $x \geq 3$, on a $f(x) = \left(\sqrt{x-3} - \sqrt{x+5}\right) \frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+5}} = \frac{-8}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+5}}$ et donc $\frac{-8}{\sqrt{x}} < f(x) < 0$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Pour tout nombre réel $x > 0$, on a $\sqrt{x^2+2x+7} + x + 5 > 5 > 0$ et donc

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(\sqrt{x^2+2x+7} - (x+5)\right) \frac{\sqrt{x^2+2x+7}+x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}+x+5} \\ &= \frac{x^2+2x+7-(x+5)^2}{\sqrt{x^2+2x+7}+x+5} = \frac{-8x-18}{\sqrt{x^2+2x+7}+x+5} \\ &= -\frac{8+\frac{18}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}+1+\frac{5}{x}}. \end{aligned}$$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc par sommes, produits, composé et quotient de limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -4$.
   Pour tout réel $x < 0$, on a $g(x) = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}} - x - 5 = -x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}+1+\frac{5}{x}\right)$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et, par sommes, produits et composé de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}}+1+\dfrac{5}{x} = 2 > 0$. Par produit de limites, on a donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

Exercice 4.

On pose $h := f - g$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $h(x) = 3x^5 + x^2 + x - 2$, et donc $h(0) = -2$ et $h(1) = 3$. Or h est un polynôme, c'est donc une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires en $0 \in [-2, 3]$, on trouve donc $x_0 \in [0, 1]$ tel que $h(x_0) = 0 = f(x_0) - g(x_0)$. Cela donne bien un réel x_0 tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 5. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$. En appliquant la définition de la limite en $\varepsilon = 1$, on trouve donc $A \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout réel $x > A$, on ait $|f(x)| < 1$. Par ailleurs, on sait que toute fonction continue sur un intervalle fermé est bornée. L'intervalle $[0, A]$ étant fermé, il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ telle que $|f(x)| \leq M$ pour

tout $x \in [0, A]$. En posant $N = \max(1, M)$, on a alors $|f(x)| \leq N$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et la fonction f est bien bornée.
Touefois, il n'existe pas nécessairement de $a \in \mathbb{R}_+$ telle que $f(a) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} f(x)$. Comme contre-exemple, on pourra, par exemple, considérer la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{1+x} \end{array}$.

Exercice 6.
On a $f(x_0) > 0$, donc $\frac{2f(x_0)}{3} > 0$. Par définition de la continuité de f en x_0, appliquée en $\varepsilon = \frac{2f(x_0)}{3}$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, on ait $|f(x) - f(x_0)| < \frac{2f(x_0)}{3}$. En posant $a = x_0 - \frac{\eta}{2}$ et $b = x_0 + \frac{\eta}{2}$, on a donc, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\frac{f(x_0)}{3} - f(x) = -\frac{2f(x_0)}{3} + f(x_0) - f(x) \leq -\frac{2f(x_0)}{3} + |f(x_0) - f(x)| < -\frac{2f(x_0)}{3} + \frac{2f(x_0)}{3} = 0,$$

et donc $\frac{f(x_0)}{3} < f(x)$.

Exercice 7.

1. Montrons que F est continue en $y_0 \in]0, 1[$. Pour cela, on considère un réel $\varepsilon > 0$ et on pose $\eta = \frac{\varepsilon^2}{C^2} > 0$. On a alors bien, pour tout $x \in]y_0 - \eta, y_0 + \eta[\cap]0, 1[$, $|F(x) - F(y_0)| \leq C\sqrt{|x - y_0|} \leq \sqrt{\eta} < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$.
2. Pour tout $x \in]0, 1[$, on a $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ et donc $\left|F(x) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq C\sqrt{\left|x - \frac{1}{2}\right|} < \frac{C}{\sqrt{2}}$. Pour tout $x \in]0, 1[$, on a donc $|F(x)| = \left|F(x) - F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \left|F(x) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \left|F\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{C}{\sqrt{2}} + \left|F\left(\frac{1}{2}\right)\right|$. La fonction F est donc bornée par $\frac{C}{\sqrt{2}} + \left|F\left(\frac{1}{2}\right)\right|$.
3. Pour une fonction continue non bornée sur $]0, 1[$, on pourra prendre la fonction inverse $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$.
   Pour une fonction non constante vérifiant $(*)$, on pourra prendre $F : \begin{array}{ccc}]0, 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$. En effet, pour tout $x, y \in]0, 1[$ on peut supposer, quitte à les permuter, que $y \leq x$. On a alors

$$\begin{aligned} 0 \leq |F(x) - F(y)| \leq \sqrt{|x - y|} &\iff (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq (\sqrt{x - y}\ )^2 \\ &\iff x - 2\sqrt{xy} + y \leq x - y \iff 2y \leq 2\sqrt{xy} \\ &\iff \sqrt{y} \leq \sqrt{x}. \end{aligned}$$

   Or la fonction racine étant croissante, on a bien $\sqrt{y} \leq \sqrt{x}$. La condition $(*)$ est donc bien vérifiée avec $C = 1$.