Université d'Aix-Marseille
Semestre 2

Licence de Mathématiques
2014-2015

Analyse 1

Examen du 13 mai 2015

Calculette et documents non autorisés. Téléphones portables interdits.
Écrivez s.v.p. lisiblement. Toute réponse doit être soigneusement justifiée.

Durée : 2 heures

Exercice 1

(3pt)
Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un réel.

1. Donner la définition avec des quantificateurs de « f est continue en x_0 ». **(1pt)**
2. Donner la définition de « f est dérivable en x_0 ».**(1pt)**
3. Écrire la formule de Taylor-Lagrange de f en 0 à l'ordre n. Sous quelles hypothèses cette formule est-elle valable ? **(1pt)**

Exercice 2

(5pt)
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

1. Montrer que si $u_0 \leq 2$ alors pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq 2$ et la suite est monotone.**(1pt)**
2. En déduire que si $u_0 \leq 2$, la suite est convergente et déterminer sa limite.**(1pt)**
3. On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.**(1pt)**
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n et u_0.**(1pt)**
5. Déterminer la limite de u_n sans hypothèse sur u_0.**(1pt)**

Exercice 3

(4pt)
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble des points où la fonction est continue.**(1pt)**
2. Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et calculer la dérivée de f en ces points.**(1pt)**
3. On se propose d'étudier maintenant la dérivabilité de f en 0.
   (a) Donner le développement limité $\sin(x)$ au point 0 à l'ordre 3.**(1pt)**
   (b) En écrivant le taux d'accroissement de la fonction f entre x et 0, montrer que la fonction f est dérivable en 0 et calculer sa dérivée en 0.**(1pt)**

Tournez S.V.P. ⇒

Exercice 4 (3pt)

1. Énoncer le théorème des accroissements finis. **(1pt)**
2. Soient a et b des réels tels que $0 < a < b$. À l'aide du théorème des accroissements finis monter que

$$\frac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b-a}{a}. \qquad \textbf{(1pt)}$$

3. Soient x et y deux réels. Montrer, toujours en utilisant le théorème des accroissements finis, qu'on a

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|. \qquad \textbf{(1pt)}$$

Exercice 5 (7,5pt)

1. Écrire les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

$$\cos(x)\ \textbf{(0,5pt)}, \quad \sin(x)\ \textbf{(0,5pt)}, \quad \exp(x)\ \textbf{(0,5pt)}, \quad \ln(1+x)\ \textbf{(0,5pt)}, \quad \sqrt{1+x}\ \textbf{(0,5pt)}.$$

2. Écrire le développement limité de $\cos(x)\sin(3x)$ en 0 à l'ordre 3.**(1pt)**
3. Écrire le développement limité de $\sqrt{1+x+x^2}$ en 0 à l'ordre 2.**(1pt)**
4. Écrire le développement limité de $\ln(1+\sin(x))$ en 0 à l'ordre 3. **(1pt)**
5. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{\ln(1+\sin(x)) - 1}\ \textbf{(1pt)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3}\ \textbf{(1pt)}.$$