Université d'Aix-Marseille — Licence de Mathématiques

Semestre 2 — 2014-2015

Analyse 1

Examen du mardi 30 juin 2015

Calculette et documents non autorisés. Téléphones portables interdits.
Écrivez s.v.p. lisiblement. Toute réponse doit être soigneusement justifiée.

Durée : 2 heures

EXERCICE 1 (3pt)

1. Énoncer la formule de Taylor-Young. **(1pt)**
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. **(1pt)**
3. Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{1+x}$. **(1pt)**

EXERCICE 2 (4pt)

1. Écrire à l'aide de quantificateurs : **(1pt)**
   (a) La définition d'une suite convergente vers l. **(0,25pt)**
   (b) La définition d'une suite divergente vers $+\infty$. **(0,25pt)**
   (c) La définition d'une suite qui ne converge pas. **(0,5pt)**
2. Calculer les limites suivantes :**(3pt)**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}\ ,\ \lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+\sin n}-n)\ ,\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+\sin n}\ .$$

EXERCICE 3 (5pt)

On considère l'application $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, définie par : $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

1. (a) Donner le développement limité de la fonction : $g : x \mapsto \ln(1+x^2)$ en 0 à l'ordre 4. **(1pt)**
   (b) En utilisant la question précédente, montrer que l'on peut prolonger l'application f par continuité en $x = 0$. **(0.5pt)**

   On note $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f.
2. Donner le domaine de définition de $\tilde{f}$ et sa valeur en $x = 0$. **(1pt)**
3. Déterminer l'ensemble des points où $\tilde{f}$ est dérivable et calculer sa dérivée en $x = 0$. **(1,5pt)**
4. Donner le développement limité de $\tilde{f}$ au point $x = 0$ à l'ordre 2. **(1pt)**

Tournez S.V.P. $\Rightarrow$

Exercice 4 (4pt)

1. Énoncer le théorème de Rolle. **(1pt)**
2. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, non identiquement nulle (i.e. $\exists c \in [0,1] : f(c) \neq 0$) et dérivable sur $]0,1[$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f'(x_0) = 0$. **(1pt)**
   (b) Le point x_0 est-il unique ? Justifier et donner un exemple de fonction illustrant votre réponse. **(1pt)**
3. Soit $f(x) = \sin(x^2 + 1) - x$. Montrer que f admet au moins une racine dans l'intervalle $[0,2]$. **(1pt)**

Exercice 5 (5pt)

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, définie par : $x \mapsto \exp(-1/x^2)$.
   (a) Calculer les limites à droite et à gauche en 0 de la fonction f. **(1pt)**
   (b) Montrer que f se prolonge par continuité en $x = 0$. On notera $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce prolongement continu. **(0.5pt)**
2. (a) Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est dérivable en zéro à droite et à gauche. **(1pt)**
   (b) La fonction $\widehat{f}$ est-elle dérivable en $x = 0$? (Justifier) Si oui, donner la valeur de cette dérivée. **(0.5pt)**
3. Calculer les limites suivantes :**(2pt)**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\ln(1 + \sin(x))} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 + x}}{\ln(\cos x)}.$$