Université d'Aix–Marseille **Licence mathématiques et informatique**

Analyse 1

Premier devoir sur table : février 2016
Durée : deux heures

Veuillez rédiger avec soin, **en formant des phrases et en limitant l'usage des symboles abréviateurs mal compris ($\Longrightarrow$, $\forall$ etc.),** des solutions aux exercices suivants. La qualité de rédaction sera prise en compte dans la note finale. Les documents écrits ainsi que les calculettes, téléphones portables et autres ustensiles électroniques sont interdits.

Exercice 1. Questions de cours.

1. Rappeler ce que signifie la phrase : « La suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite. » : d'abord en langage formel (avec des quantificateurs, un « *epsilon* » etc.), puis en traduisant cette définition formelle en langue française, sans utilisation de quantificateurs, expliquant le *sens* de cette définition.
2. Traduire en langage formel (avec des quantificateurs etc.) la phrase suivante : « La suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M. ».
3. En utilisant les réponses aux deux questions précédentes, démontrer qu'une suite qui est convergente est nécessairement majorée. On pourra fixer explicitement un certain $\epsilon > 0$, l'utiliser dans la définition de la convergence puis, à partir de là, construire un majorant.
4. Donner un exemple de suite majorée mais non convergente, en justifiant brièvement le fait que la suite que vous exhibez n'est pas convergente.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{2n+1}{4n+3}u_n.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$ on a
$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}.$$
3. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$ on a $n \leq 2^n$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en utilisant la définition « avec ϵ » de la convergence.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = \frac{n+1}{n}\sin(n\pi/3).$$

1. Calculer $\sin(n\pi/3)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
2. Démontrer, en utilisant la définition en « avec ϵ », que la suite de terme général $(n+1)/n$ est convergente.
3. Bien que la suite (u_n) ne converge pas, elle admet des sous-suites (ou suites extraites) convergentes. Déterminer une sous-suite de (u_n) qui converge vers $\sqrt{3}/2$.