Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Année universitaire 2015/2016

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence Math-Info
Code du module : SMI2U1 Libellé du module : Analyse 1
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1. Soit $a > 0$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par

$$u_n = (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n), \qquad v_n = a + a^2 + \cdots + a^n.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer v_n.
   (b) En déduire que si $0 < a < 1$, alors la suite (v_n) est majorée.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe $c \in [0, x]$ tel que
$$\mathrm{e}^x - 1 = x\mathrm{e}^c,$$
   puis en déduire que $1 + x \leq \mathrm{e}^x$.
4. En déduire que si $0 < a < 1$, alors la suite (u_n) est convergente.

Exercice 2. On définit une suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin\left(\dfrac{u_n}{2}\right). \end{cases}$$

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|u_n|$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est 1-périodique, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = f(x).$$

1. Rappeler la définition de la continuité de f en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. Justifier que f est bornée sur l'intervalle $[0, 1]$.
3. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.
4. On suppose en plus que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 4.

1. Énoncer la formule de Taylor-Young pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, au point 0.
2. Écrire les développements limités à l'ordre 3, au point 0, des fonctions
$$\mathrm{e}^x, \qquad \cos(x), \qquad \ln(1+x).$$
3. Montrer que le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\ln(\cos(x))$, au point 0, s'écrit
$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)x^2$$
   avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
4. En posant $x = 1/n$, en déduire la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}.$$