

Planche 2
Limites, continuité

Les exercices marqués du symbole ♣ sont les exercices qui seront traités prioritairement en TD.

Le site internet EXO7 (<http://exo7.emath.fr>) est fait pour vous ! Il s'agit d'une base de donnée d'exercices destinés aux étudiants de licence, avec des corrections des exercices écrites et filmées. Il a été conçu par une large équipe d'enseignants-chercheurs de plusieurs universités françaises.

Certains exercices de cette planche sont tirés du site Exo7. D'autres sont similaires (mais pas identiques) à un exercice d'EXO7.

Alors n'hésitez plus ! Consultez EXO7 et servez-vous en pour préparer les séances de TD à l'avance et pour vous entraîner !

Limites de fonctions

EXERCICE 1 ♣

Soient $l \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Écrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes :

1. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers a .
2. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 ♣

1. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ pour $x \in]-1, 1[$. Quelle est la limite à gauche de f en 1 ?
2. $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ pour $x \in [3, +\infty[$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
3. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - (x+1)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Quelle la limite de f en $+\infty$?
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{2x^2-x-1}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite à gauche de f en 1 ?
5. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite à droite de f en 0 ?
6. $f(x) = \frac{\ln(2x^2-x+2)}{\sqrt{x^3+1}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Quelle est la limite en $+\infty$?
7. $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$ pour $x \in]-\pi, \pi[$. Quelle sont les limites (respectivement à droite et à gauche) en $-\pi$ et π ?
8. $f(x) = \frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$ pour $x \in [-2, 2] \setminus \{0\}$. Quelle est la limite en 0 ?
9. $f(x) = 2x \ln(x + \sqrt{x})$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Quelle est la limite (à droite) en 0 ?
10. $f(x) = (x^2-1) \ln(7x^3+4x^2+3)$ pour $x \in]-1, +\infty[$. Quelle est la limite (à droite) en -1 ?
11. Soit $a > 0$. On définit f par $f(x) = \frac{(1+x)^a}{x}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?
12. $f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?

EXERCICE 3 ♣

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un point de I . On suppose que f admet une limite $a > 0$ en x_0 . Démontrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x)| \geq \frac{a}{2}$.

Propriétés des limites et opérations

EXERCICE 4 [Opérations sur les limites] ♣

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On pose $I =]a, b[$. Soient f et g deux applications de I dans \mathbb{R} et $l, m \in \mathbb{R}$. On suppose que $l = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ et $m = \lim_{x \rightarrow a, x > a} g(x)$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a, x > a} (f + g)(x) = l + m$.
2. On suppose que $m \neq 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que pour tout $x \in]a, c[$, $g(x) \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

- On suppose que $m = 0$, $l > 0$ et que pour tout $x \in I$, $g(x) > 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.
- On prend ici $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = x$. Les applications fg et f/g (qui est bien définie sur I) ont-elles une limite à droite en 0?

EXERCICE 5 [Limite, limite à droite et limite à gauche] ♣

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Soit f une application définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ à valeurs dans \mathbb{R} .

- Montrer que f admet l comme limite en a si et seulement si f admet (en a) l comme limite à droite et comme limite à gauche.
- Reprendre la question 1 avec $l = +\infty$ et avec $l = -\infty$.

EXERCICE 6 [Caractérisation de la limite à gauche]

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Soit f une application définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ à valeurs dans \mathbb{R} .

- Montrer que f admet l comme limite à gauche en a si et seulement si f vérifie la condition suivante : Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A ,

$$x_n \uparrow a, \text{ quand } n \rightarrow +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l,$$

où « $x_n \uparrow a$ quand $n \rightarrow +\infty$ » signifie « $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ».

- Reprendre la question 1 avec $l = +\infty$ et avec $l = -\infty$.

EXERCICE 7 [Limite en $+\infty$] ♣

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

EXERCICE 8 [Fonction périodique admettant une limite]

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est périodique de période T). On suppose de plus que f admet une limite finie, notée l , en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

EXERCICE 9 ♣

On définit f par $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0? une limite à droite en 0? une limite à gauche en 0?

EXERCICE 10 ♣

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$. On définit f par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ pour tout $x \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, L'application f a-t-elle une limite en n ? une limite à droite en n ? une limite à gauche en n ?

Continuité en un point, prolongement par continuité

EXERCICE 11 ♣

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par : $f(x) = x$ si $x < 1$, $f(x) = x^2$ si $1 \leq x \leq 4$, et $f(x) = 8\sqrt{x}$ si $x > 4$.

- Tracer le graphe de f .
- f est-elle continue?
- Montrer que f est bijective et donner la formule définissant f^{-1} .

EXERCICE 12 ♣

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ déterminer α tel que, $|x| \leq \alpha \implies |f(x) + 3| \leq \varepsilon$. Que peut-on en conclure sur f ?

EXERCICE 13 ♣

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{1}{x}$ et soit $a > 0$. Montrer que pour tous réels $x, y \in [a, +\infty[$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{a^2}$. En déduire que f est continue sur $]a, +\infty[$. Que peut-on dire de la continuité de f sur \mathbb{R}_+^* ?

EXERCICE 14

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Trouver $\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta \implies |\sin(x) - \sin(a)| < \varepsilon$. Que peut-on en déduire sur la fonction sinus?

EXERCICE 15 ♣

Étudier la continuité sur \mathbb{R} des fonctions suivantes :

- $f(x) = \sin(x) \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;
- $g(x) = x \frac{1}{\sin(x)}$ si x n'est pas un multiple de π et $g(x) = 0$ si x l'est ;
- $j(x) = xE(x)$;
- $k(x) = E(x) \sin(\pi x)$.

EXERCICE 16 [Fonction continue, non nulle en un point] ♣

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a .

EXERCICE 17 [Prolongement par continuité]

Pour $x \in]0, 1[$, on pose $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 et en 1 ?

EXERCICE 18 [Prolongement par continuité] ♣

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}.$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
3. Existe-t-il une fonction g définie et continue sur \mathbb{R} et qui est égale à f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$?

EXERCICE 19 ♣

Pour quelle valeur de α la fonction f , définie ci-après, est-elle continue sur \mathbb{R} ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ \alpha & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Continuité sur un intervalle - théorème des valeurs intermédiaires

EXERCICE 20 ♣

Soit f une application continue d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} .

1. On suppose que f ne s'annule pas sur I . Montrer que f garde un signe constant sur I .
2. On suppose que $f(x) \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

EXERCICE 21 [Polynôme de degré impair] ♣

Montrer que toute fonction polynôme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de degré impair, s'annule en au moins un point.

EXERCICE 22 ♣

Montrer que le polynôme $x^{30} + 14x^{17} - 7x^5 - 7$ admet au moins une racine dans l'intervalle $]0, 1[$.

EXERCICE 23

1. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de l'intervalle $[a; \frac{a+b}{2}]$.
2. *Application* : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 minutes pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

EXERCICE 24 ♣

Soit f l'application de $[-1, \infty[$ dans \mathbb{R} définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$ pour tout $x \geq -1$. Montrer que f est bijective de $[-1, \infty[$ dans $]0, 1]$ et donner une formule explicite pour sa fonction réciproque.

EXERCICE 25 [Existence d'un maximum] ♣

Soit f une fonction continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ . On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq f(a)$).

EXERCICE 26 ♣

Soit f et g deux fonctions de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , continues et t.q. $f(0) = g(1) = 0$ et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists x \in [0, 1], f(x) = g(x).$$

EXERCICE 27 [Borne supérieure atteinte] ♣

Soit f une application continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ . On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrer que $\{f(x), x \in \mathbb{R}_+\}$ est majoré et qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) = \sup\{f(x), x \in \mathbb{R}_+\}$.

Suites récurrentes et continuité

Voir les exercices 45, 46, 48, 51, 52 de la planche 1 sur les suites.

Exercices supplémentaires

EXERCICE 28 [Fonction lipschitzienne]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue (sur tout \mathbb{R}).

EXERCICE 29

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} est uniformément continue sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, (|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

1. Montrer que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$. En déduire que l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I , alors f est continue sur I .
3. Montrer que l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1[$.

EXERCICE 30 [Fonctions monotones]

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I =]a, b[$. Soit f une application strictement croissante de I dans \mathbb{R} . On pose $A = \{f(x), x \in I\}$, $\alpha = \inf A$ et $\beta = \sup A$. (Si A est non minorée, on pose $\inf A = -\infty$. Si A est non majorée, on pose $\sup A = +\infty$.)

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ (on pourra distinguer les cas $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha = -\infty$). Montrer que $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \beta$.
2. Soit $c \in I$. Montrer que f admet une limite à droite en c , notée $f_d(c)$, et une limite à gauche en c , notée $f_g(c)$. Montrer que $f_g(c) \leq f(c) \leq f_d(c)$.
3. On suppose que $f_d(c) = f_g(c)$ pour tout $c \in I$ (avec f_d et f_g définies à la question précédente). Montrer que f est continue et que f est bijective de $]a, b[$ dans $]\alpha, \beta[$.

EXERCICE 31 [Injectivité et continuité impliquent monotonie]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est monotone. [Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

EXERCICE 32 [Valeur intermédiaire]

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

1. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, l'ensemble $\{s \in [0, 1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$ est non vide. Pour $t \in [0, 1]$, on pose $\varphi(t) = \inf\{s \in [0, 1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$.
2. Soit $t \in [0, 1]$, montrer que $\varphi(t) \in [0, 1]$ et que $f(\varphi(t)) = \frac{f(0)+f(t)}{2}$.
3. Montrer que si f est strictement croissante, l'application φ ainsi définie de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ est continue.
4. Donner un exemple de fonction f pour lequel la fonction φ n'est pas continue.

EXERCICE 33 [Continuité de "max" et "min"]

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ et $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.
2. Soit f et g deux applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On définit les applications $f \top g$ et $f \perp g$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$(f \top g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, (f \perp g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en a . Montrer que $f \top g$ et $f \perp g$ sont continues en a .

EXERCICE 34 [Convexe implique continue]

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que f est convexe, c'est à dire que $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

1. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $\beta x \leq f(x) - f(0) \leq \alpha x$. [Utiliser le fait que $x = t1 + (1 - t)0$, avec $t = x$, et $0 = tx + (1 - t)(-1)$, avec $t = \frac{1}{1+x}$.]
2. Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que $|f(x) - f(0)| \leq \gamma|x|$. En déduire que f est continue en 0.
3. Montrer que f est continue en tout point de \mathbb{R} .

EXERCICE 35 [Exercice sur les valeurs intermédiaires]

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} t.q. $f(0) = f(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. pour $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on pose $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $x_0, x_1 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $g(x_0) \leq 0$ et $g(x_1) \geq 0$.
3. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

EXERCICE 36 [Point fixe]

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et vérifiant

$$\forall x_1, x_2 \in [0, 1], |x_1 - x_2| \leq |f(x_1) - f(x_2)|.$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que $\{f(0), f(1)\} = \{0, 1\}$.
3. Montrer que f est surjective.
4. Montrer que f admet un point fixe.

EXERCICE 37 [Equation fonctionnelle]

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}_+ , à valeurs dans \mathbb{R} et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\text{Pour tout } x, y \in \mathbb{R}_+, f(x + y) = f(x)f(y).$$

1. Montrer que f est à valeurs positives ou nulles.
2. Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est identiquement nulle.
Dans ce qui suit on suppose que f n'est pas identiquement nulle.
3. Calculer $f(0)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f(nx)$ et $f(\frac{x}{n})$ en fonction de $f(x)$ et n .
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et p, q deux entiers naturels strictement positifs. On pose $r = \frac{p}{q}$, En calculant $f(q(rx))$ de deux manières différentes, exprimer $f(rx)$ en fonction de $f(x)$ et r .
6. *Dans cette question on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$.*
 - (a) Construire une suite (x_n) de réels strictement positifs convergeant vers 0 et telle que $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Montrer que la fonction f est nulle sur \mathbb{R}^{+*} .
Dans ce qui suit on suppose que f est à valeurs strictement positives.
7. On suppose dans cette question que f est continue à droite sur \mathbb{R}_+ . Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
8. On suppose que f est continue à droite en 0, montrer que f est continue à droite en tout point de \mathbb{R}_+ et conclure qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
9. On suppose qu'il existe deux réels A, B vérifiant $0 \leq A < B$ tels que f soit majorée sur $[A, B]$.
 - (a) Montrer que sur $[0, B - A]$, f est minorée de borne inférieure strictement positive.
 - (b) Montrer que f est continue à droite de 0.
 - (c) Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

EXERCICE 38 [Croissance et continuité]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit f une fonction croissante de $]a, b[$ dans \mathbb{R} . Montrer que f est continue si et seulement si l'image $f(]a, b[)$ est un intervalle.

EXERCICE 39 [Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)]

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe $x_2 \in [0, 1]$ tel que $f(x_2) = (x_2)^2$. [On pourra considérer la fonction $g(x) = f(x) - x^2$.]
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = (x_n)^n$.
3. On suppose maintenant que f est strictement décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $h_n(x) = f(x) - x^n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que h_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et qu'il existe un unique $x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = (x_n)^n$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_{n+1}(x_n) > 0$. En déduire $x_{n+1} > x_n$.
Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$. Quelle est la limite de $(x_n)^n$ quand $n \rightarrow +\infty$?

EXERCICE 40 [Valeur intermédiaire]

Soit $\alpha > 0, \beta > 0$.

Soit f une fonction continue de $[0, \alpha[$ dans \mathbb{R} , t.q. $f(0) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha, x < \alpha} f(x) = +\infty$.

Soit g une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , t.q. $g(0) < 0$ et $g(\beta) > 0$.

Montrer qu'il existe $x \in]0, \min(\alpha, \beta)[$ t.q. $f(x)(x - \beta) - g(x) = 0$. [On pourra distinguer les cas $\beta < \alpha, \beta > \alpha$ et $\beta = \alpha$.]

Quelques exos de plus

EXERCICE 41 [Moyenne de Césaro]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$.

1. Soit $l \in \mathbb{C}$. On suppose (dans cette question) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.
2. On suppose maintenant que $u_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ implique $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
 - (b) On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}_+$, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.$$

3. (Généralisation) Soit (λ_n) une suite de nombres réels strictement positifs. Soit $l \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k = +\infty.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$w_n = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k u_k}{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k}.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$.

4. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

5. Soit $l \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = l$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = l$.

EXERCICE 42 [Borne supérieure d'une fonction]

On définit la fonction f de $]0, \infty[$ dans \mathbb{R} par $f(x) = -\frac{1}{x} \cos(x)$. On pose $A = \{f(x), x \in]0, \infty[\}$.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que la fonction f n'est pas minorée (i.e. la partie A n'est pas minorée).
3.
 - (a) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \beta$, t.q., pour tout $x \in]0, \infty[$, $f(x) \leq \sup B$ avec $B = \{f(y); y \in [\alpha, \beta]\}$.
 - (b) En déduire que la fonction f est majorée (i.e. la partie A est majorée) et que la borne supérieure de f est atteinte.
Soit $a \in]0, \infty[$ t.q. $f(a) = \sup A$ (c'est-à-dire $f(a) \geq f(x)$ pour tout $x \in]0, \infty[$).

4. Montrer que $f(a) > 0$ et que $a < 2\pi$.

5. Montrer que $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}$ et que $f'(a) = 0$.

6. Pour $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, on pose $g(x) = x \sin(x) + \cos(x)$. Montrer qu'il existe un unique $b \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ t.q. $g(b) = 0$. Montrer que $b \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Montrer que $a = b$ et en déduire que f atteint son maximum en un unique point.

EXERCICE 43 [Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, construire $x_\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - x_\varepsilon| \leq \varepsilon$.