

Planche 3
Dérivation, développements limités

Dérivabilité, dérivée

EXERCICE 1 [Opérations sur les dérivées] ♣

Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $x \in]a, b[$ et f, g deux applications de $]a, b[$ dans \mathbb{R} . On suppose que f et g sont dérivables en x .

1. Montrer que $(f + g)$ est dérivable en x et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
2. Montrer que fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. On suppose que $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in]a, b[$. Montrer que f/g est dérivable en x et que :

$$(f/g)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

EXERCICE 2 [Dérivabilité de $x \mapsto x^n$] ♣

Soit n un entier relatif. On considère la fonction à valeurs dans \mathbb{R} définie par $f_n(x) = x^n$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f_n (distinguer suivant les valeurs de n) ?
2. Montrer que f_n est dérivable sur D et déterminer sa dérivée.

EXERCICE 3 [calcul de dérivées] ♣

1. Calculer les dérivées des fonctions f_i suivantes définies par :

$$f_1(x) = x \ln(x), \quad f_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad f_3(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}},$$
$$f_4(x) = \left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)^{\frac{1}{3}}, \quad f_5(x) = x^x, \quad f_6(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x).$$

2. On note $\Delta(f) = \frac{f''}{f}$. Calculer $\Delta(fg)$.
3. Soit $f :]1, +\infty[\rightarrow]-1, +\infty[$ définie par $f(x) = x \ln(x) - x$. Montrer que f est une bijection. Notons $g = f^{-1}$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.
4. Calculer les dérivées successives de $f(x) = \ln(1+x)$.
5. Calculer les dérivées successives de $f(x) = x^3 \ln(x)$.

EXERCICE 4 [Dérivabilité de $x \mapsto x^{1/n}$] ♣

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $g_n(x) = x^{1/n}$. Rappelons que g est par définition la fonction réciproque de la restriction à $]0, +\infty[$ de la fonction $f_n(x) = x^n$.

1. Montrer que g_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que le graphe de g_n admet une demi-tangente verticale en 0.

EXERCICE 5 ♣

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \exp(f(x)), \quad f_2 : x \mapsto (f(\sin x))^2, \quad f_3 : x \mapsto \ln |f(x)|, \quad f_4 : x \mapsto f(\ln |f(x)|).$$

EXERCICE 6 ♣

Soit $f : x \mapsto 1/x$ définie sur \mathbb{R}_+^* . On admettra l'existence d'une fonction \ln (logarithme népérien) définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* , s'annulant en 1 et vérifiant $\ln' = f$.

1. Montrer que la fonction \ln est ainsi définie de manière unique.
2. Montrer que \ln est strictement croissante.
3. Soit $a > 0$ et $g_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_a(x) = \ln(ax) - \ln(a)$. Montrer que g_a est dérivable et calculer g'_a et $g_a(1)$.
4. En déduire que pour tout $a, b > 0$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
5. Montrer, en étudiant une fonction bien choisie, que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.

EXERCICE 7 [Dérivée non continue] ♣

On définit f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en tout point de \mathbb{R} et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La dérivée de f est-elle continue ?

EXERCICE 8 ♣

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + e^x$. Montrer que f est strictement croissante, continue et bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On note g l'application réciproque de f . Montrer que g est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . Calculer $g'(1)$ et $g''(1)$.

EXERCICE 9 [Exercice de rédaction] ♣

Soit φ une application de $]0, \infty[$ dans \mathbb{R} , dérivable (en tout point de $]0, \infty[$) et t.q. $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$.

1. On suppose que $\varphi'(x) \leq 0$ pour tout $x > 0$. Montrer que $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.
2. On suppose que $\varphi'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. Montrer que $\varphi(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Applications de la dérivée : Rolle, accroissements finis, extrema locaux, convexité

EXERCICE 10 [Application du théorème de Rolle] ♣

1. Dessiner le graphe de fonctions vérifiant : f admet deux minimum locaux et un maximum local ; h admet un minimum local qui n'est pas global et un maximum local qui est global ; k admet une infinité d'extremum locaux ; l n'admet aucun extremum local.
2. Calculer en quel point la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet un extremum local.
3. Soit $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. une fonction deux fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Montrer qu'il existe c, d tels que $f'(c) = f'(d) = 0$. Montrer qu'il existe e tel que $f''(e) = 0$.
4. Montrer que chacune des 3 hypothèses du théorème de Rolle est nécessaire.

EXERCICE 11 [Extremum local] ♣

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |1 - x^2|$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ mais n'est pas dérivable en -1 et en 1 .
2. Montrer que f admet un maximum local en 0 et des minima locaux en -1 et en 1 .

EXERCICE 12 ♣

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit k un entier ≥ 2 . On suppose qu'il existe k nombres réels distincts appartenant à I en lesquels f s'annule. Démontrer qu'il existe au moins $k - 1$ nombres réels distincts appartenant à I en lesquels f' s'annule.

EXERCICE 13 ♣

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a la double inégalité :

$$\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \frac{1}{x}$$

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \log(n)$$

3. Posons $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n)$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

EXERCICE 14 [Application des accroissements finis] ♣

1. Soit $f : x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$. Étudier la fonction f . Tracer son graphe. Montrer que f admet un minimum local et un extremum local.
2. Soit $g : x \mapsto \sqrt{x}$. Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[100, 101]$. En déduire l'encadrement : $10 + \frac{1}{22} \leq \sqrt{101} \leq 10 + \frac{1}{20}$.
3. Appliquer le théorème des accroissements finis pour montrer que $\ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$ pour tout x strictement positif.
4. Soit $h : x \mapsto e^x$. Que donne l'inégalité des accroissements finis sur $[0, x]$?

EXERCICE 15 [Application règle de l'Hôpital (ou règle de Bernoulli)] ♣

Appliquer la règle de l'Hôpital pour calculer les limites des fonctions suivantes quand x tend vers 0

$$f : x \mapsto \frac{x}{(1+x)^n - 1}, \quad g : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}, \quad h : x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{\tan(x)} \quad \text{et} \quad k : x \mapsto \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

EXERCICE 16 [Étude d'une fonction] ♣

Soit $a > 0$. On définit f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{a}{|x|}\right)^x, & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(On rappelle que $b^x = e^{x \ln b}$, pour $b > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.)

1. (Continuité de f)

(a) Montrer que $e^z \geq 1 + \frac{z^2}{2}$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+$. En déduire que $\ln(1+y) \leq \sqrt{2y}$, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$.

(b) En utilisant la question précédente, montrer que $1 \leq f(x) \leq e^{\sqrt{2ax}}$, pour tout $x \in]0, \infty[$.

(c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = 1$.

(d) Montrer que f est continue en 0. [On pourra remarquer que $f(x)f(-x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

2. (Dérivabilité de f sur \mathbb{R}^*) Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. [Pour $x > 0$, on pourra mettre $f'(x)$ sous la forme $f(x)\varphi(x)$ et utiliser l'exercice 9.] Montrer que f est strictement croissante.

3. (Dérivabilité en 0?) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$. L'application f est-elle dérivable en 0? (Justifier la réponse...)

4. (Limites en $\pm\infty$) Donner (en fonction de a) les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f .

Dans la suite, on note l et m ces limites.

5. (Fonction réciproque) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} dans $]m, l[$. On note g la fonction réciproque de f (de sorte que g est une application de $]m, l[$ dans \mathbb{R}). Montrer que g est dérivable en 1 (noter que $1 \in]m, l[$) et calculer $g'(1)$. [Pour $h \neq 0$, on pourra appliquer le théorème des Accoissements Finis à la fonction f entre les points $g(1+h)$ et $g(1)$.]

6. (Régularité de la fonction réciproque) Montrer que la fonction réciproque de f est de classe C^1 sur $]m, l[$ mais que f n'est pas de classe C^1 sur \mathbb{R} .

EXERCICE 17 [Fonction convexe] ♣

Soit φ une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que φ est dérivable (c'est-à-dire dérivable en tout point de \mathbb{R}) et que φ' est une fonction croissante.

1. Soit $x < z < y$. Montrer que $\frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z}$.

2. Montrer que φ est convexe, c'est-à-dire que

$$(1) \quad \varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R} \text{ et tout } t \in [0, 1].$$

[Pour $x < y$ et $t \in]0, 1[$, on pourra utiliser la question 1 avec $z = tx + (1-t)y$.]

3. On définit ici la fonction ψ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $\psi(x) = |x|$ si $x \in \mathbb{R}$. Montrer que ψ est convexe. La fonction ψ est-elle dérivable en tout point de \mathbb{R} ?

Formules de Taylor, équivalents, développements limités

EXERCICE 18 [Application formule de Taylor] ♣

1. Écrire les trois formules de Taylor en 0 pour $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \exp(-x)$ et $x \mapsto sh(x)$.

2. Écrire les formules de Taylor en 0 à l'ordre 2 pour $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ et $x \mapsto \tan(x)$.

3. Écrire les formules de Taylor en 1 à l'ordre 2 pour $f : x \mapsto x^3 - 9x^{1/2} + 14x + 3$.

4. Avec une formule de Taylor à l'ordre 2 de $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$ trouver une approximation de $\sqrt{1.01}$.

Même question avec $\ln(0.99)$ (pour cela on pourra calculer le DL en 0 de $h : x \mapsto \ln(1-x)$).

EXERCICE 19 [Limites] ♣

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\sin x - x}.$$

2. Calculer

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^x.$$

Donner un équivalent de $l - \left(\frac{x+1}{x} \right)^x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

EXERCICE 20 [Un peu d'analyse numérique] ♣

Donner une valeur approchée de $\sin(1)$ à 10^{-6} -près, c'est-à-dire donner un nombre réel l tel que $|\sin(1) - l| \leq 10^{-6}$. [On pourra considérer la fonction sinus sur $[0, 1]$ et écrire la formule de Taylor-Lagrange à un ordre convenable à déterminer ; on remarquera que le reste dans cette formule se borne facilement.]

EXERCICE 21 [DL, exemple 1] ♣

On définit f sur $] -\infty, 1[$ par :

$$f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}.$$

Donner le développement limité à l'ordre 3 de f en 0.

EXERCICE 22 [DL, exemple 2] ♣

1. Calculer le DL en 0 de $x \mapsto \cosh(x)$ en utilisant TY. Retrouver ce DL en utilisant $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

2. Écrire le DL en 0 à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$. Même question avec $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

3. Écrire le DL en 2 à l'ordre 2 de $h : x \mapsto \sqrt{x}$.

4. Justifier l'expression du DL de $k : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ à l'aide de l'unicité du DL et de la somme d'une suite géométrique.

EXERCICE 23 [DL d'un polynôme...] ♣

Donner le développement limité à l'ordre 7 en -1 de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^4 - 1$.

EXERCICE 24 [DL somme, opérations] ♣

1. Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_1 : x \mapsto \exp(x) - \frac{1}{1+x}$, puis de $g_1 : x \mapsto x \cos(2x)$ et $h_1 : x \mapsto \cos(x) \times \sin(2x)$.

2. Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_2 : x \mapsto \sqrt{1+2\cos(x)}$, puis de $g_2 : x \mapsto \exp(\sqrt{1+2\cos(x)})$.

3. Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_3 : x \mapsto \ln(1+\sin(x))$. Même question à l'ordre 6 pour $g_3 : x \mapsto (\ln(1+x^2))^2$.

4. Calculer le DL en 0 à l'ordre n de $f_4 : x \mapsto \frac{\ln(1+x^3)}{x^3}$. Même question à l'ordre 3 pour $g_4 : x \mapsto \frac{e^x}{1+x}$.

5. Par intégration retrouver la formule du DL de $f_5 : x \mapsto \ln(1+x)$. Même question à l'ordre 3 pour $g_5 : x \mapsto \arccos(x)$.

EXERCICE 25 [Utilisation des DL(1)] ♣

Donner la limite en 0 de f définie sur $]0, \infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

EXERCICE 26 [Utilisation des DL(2)] ♣

1. Calculer la limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{\sin(x) - x}{x}$.

2. Calculer la limite de $\frac{\sqrt{x} - 1}{\ln(x)}$ lorsque x tend vers 1. Même question avec $\left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{x}}$, puis $\frac{1}{\tan^2(x)} - \frac{1}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

3. Soit $f : x \mapsto \exp(x) + \sinh(x)$. Calculer l'équation de la tangente en $x = 0$ et étudier la position du graphe

de f par rapport à cette tangente. Même question avec $g(x) = \sinh(x)$.

4. Calculer le DL en $+\infty$ à l'ordre 5 de $h : x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}$. Même question à l'ordre 2 pour $\varphi : x \mapsto (1 + \frac{1}{x})^x$.

5. Soit $k : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3+1}{x+1}}$. Déterminer une équation de l'asymptote de k en $+\infty$ et la position du graphe par rapport à cette asymptote.

EXERCICE 27 [DL d'une fonction réciproque] ♣

On définit f sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x + \sin x$.

1. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , strictement croissante. On note, dans la suite, g sa fonction réciproque.
2. Montrer que f et g sont dérivables en tout point de \mathbb{R} .
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de g .

EXERCICE 28 [Équivalents] ♣

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $((1+x)^\alpha - 1) \sim \alpha x$ en 0.
2. Montrer que $(1+x+x^2) \sim x^2$ en $+\infty$.
3. Soit f, g, h des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $\mu \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \sim h$ et $g \sim \mu h$ en 0 et que $\mu \neq 0$. Montrer que $(f+g) \sim (\mu+1)h$ en 0. Donner un exemple où ce résultat est faux si $\mu = 0$.
4. Soit f et g des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \sim g$ en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$. On pose $h(x) = \ln(x)$ pour $x > 0$. Montrer que $h \circ f \sim h \circ g$ en 0.
5. Soit f, g, h des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que $f \sim h$ en 0 et que $g = o(h)$ au voisinage de 0. Montrer que $(f+g) \sim h$ en 0.

EXERCICE 29 [Équivalents] ♣

Soit f, g, φ, ψ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x^4 + 1$, $\varphi(x) = x^3 - 3x$, $\psi(x) = x^3$.

1. Montrer que $f \sim g$ en 0.
2. Montrer que $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont définies sur $] -1, \infty[$ et que $\ln(f) \not\sim \ln(g)$ en 0.
3. Montrer que $\varphi \sim \psi$ en $+\infty$.
4. Montrer que $e^\varphi \not\sim e^\psi$ en $+\infty$.

EXERCICE 30 [Étude d'une fonction (1)] ♣

Soit la fonction f définie sur $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + \tan x)}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en 0.
2. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.

EXERCICE 31 [Étude d'une fonction (2)] ♣

On définit la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $f(x) = 3x + \frac{\cos(x)}{x^2 + 1}$.

1. Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est strictement croissante.
3. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
4. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 et donner ce développement. Donner l'équation de la tangente (à la courbe de f) en 0 et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.
5. Montrer que g admet un développement limité d'ordre 2 en 1 et donner ce développement.
6. Donner les asymptotes de f en $\pm\infty$.
7. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ et donner les asymptotes de g en $\pm\infty$.

EXERCICE 32 [Étude de $\ln(1-x)/x$] ♣

1. Montrer que pour tout entier n , la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ admet un développement limité à l'ordre n en zéro. Calculer explicitement ce développement pour $n = 2$.
2. Soit $g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$. Montrer que g se prolonge par continuité en zéro (à droite).

Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \in]0, 1[, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0, 1[$.
4. Montrer que f est dérivable à droite en zéro et donner la valeur de cette dérivée (notée $f'(0)$).
5. Calculer la fonction dérivée f' sur $]0, 1[$. La fonction f' est-elle continue en zéro ?
6. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a $\ln(1-x) + \frac{x}{1-x} \geq 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0, 1[$.
7. Dresser le tableau de variations de f et tracer l'allure de son graphe sur $]0, 1[$ (on pensera à calculer la limite de f en 1).

Exercices Supplémentaires

EXERCICE 33 [Limite à l'infini]

Soit f une fonction dérivable de $]0, \infty[$ dans \mathbb{R} . On suppose que $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

EXERCICE 34 [Fonctions höldériennes]

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ et $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$. On suppose que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|^\beta$.

1. Montrer que f est continue en tout point de \mathbb{R} .
2. On suppose, dans cette question, que $\beta > 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f'(x) = 0$. En déduire que f est constante.
3. (Exemple) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|g(y) - g(x)| \leq |y - x|^{\frac{1}{2}}$. [On pourra montrer qu'on peut supposer $|y| \geq |x|$, et distinguer les cas où x et y sont de même signe et où x et y sont de signe contraire.]

EXERCICE 35

Soit n un entier ≥ 2 , a et b des nombres réels et P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = X^n + aX + b$.

1. Combien le polynôme P' a-t-il de racines réelles ?
2. Montrer que le polynôme P a au plus deux racines réelles si n est pair et au plus trois racines réelles si n est impair.

EXERCICE 36 [Utilisation du théorème des accroissements finis]

Soit f une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que f est dérivable pour tout $x \neq 0$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$.

1. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
2. On suppose maintenant que f est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , strictement croissante et que $f(0) = 0$. On note g la fonction réciproque de f [l'existence de la fonction g a été vue en cours]. Montrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.

EXERCICE 37 [Condition nécessaire et condition suffisante de minimalité]

Soit f une application \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est de classe C^1 et que f admet un minimum local en a . Montrer que $f'(a) = 0$.
2. On suppose que f est de classe C^2 , $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$. Montrer que f admet un minimum local en a .
3. Donner un exemple pour lequel f est de classe C^2 , $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ et f n'admet pas un minimum local en a .

EXERCICE 38 [Limite en 0]

Trouver les limites en 0 des fonctions suivantes, définies sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos(x) \right), \quad g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}, \quad h(x) = \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

EXERCICE 39 [DL(3)]

Calculer le DL d'ordre 3 en 0 de f définie pour $x \in]-1, 1[$ par $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + \tan(x) + \frac{1}{1-x}$.
Calculer le DL3 d'ordre 3 en $\frac{\pi}{2}$ de f définie pour $x \in]0, \pi[$ par $f(x) = \ln(\sin(x))$.

EXERCICE 40 [DL(4)]

Donner le DL d'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes (définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) :

$$f(x) = (1 + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}}, \quad g(x) = e^{\cos(x)}.$$

EXERCICE 41 [DL(n)]

On définit f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ = 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0 et admet un DLn en 0, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 42 [Développement limité curieux]

On définit f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.

2. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $u > 0$, $e^u \geq \frac{u^q}{q!}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer, en utilisant la question précédente, que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$. En déduire que f admet un développement limité d'ordre n en 0 et donner ce développement.

EXERCICE 43 [Étude de la fonction $x \mapsto x \arctan x$]

Étudier la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x \arctan x.$$

[Montrer que f est paire. Calculer f' et f'' . Étudier les asymptotes.]

EXERCICE 44 [Limite en $+\infty$]

Pour $x > 0$ on pose $f(x) = x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. [On pourra, sur une fonction convenable, utiliser un développement limité ou le théorème des accroissements finis.]