# Corrigé du contrôle continu n°1

---

**Exercice 1.** Questions de cours

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
   (a) **[1 pt]** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si et seulement si
   $$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, u_n \leq -A.$$
   (b) **[1 pt]** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 2 si et seulementsi
   $$\exists \epsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N, |u_n - 2| > \epsilon.$$
2. Le but de cette question est de démontrer le théorème des gendarmes. On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. On fixe un réel $\epsilon > 0$.
   (a) **[1 pt]** Traduire à l'aide de quantificateurs la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\ell$.
   On a :
   $$\forall \tilde{\epsilon} > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |a_n - \ell| \leq \tilde{\epsilon}.$$
   En déduire qu'il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont minorés par $\ell - \epsilon$.
   On applique la définition ci-dessus avec $\tilde{\epsilon} = \epsilon$ ce qui nous donne un $N_1$ vérifiant :
   $$\forall n \geq N_1, |a_n - \ell| < \epsilon.$$
   Or, par définition de la valeur absolue on a : $|a_n - \ell| < \epsilon$ ssi $-\epsilon < a_n - \ell < \epsilon$; on en déduit en particulier que si $n \geq N_1$ alors $a_n \geq \ell - \epsilon$.
   (b) **[1 pt]** De la même façon, montrer qu'il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel les termes de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont majorés par $\ell + \epsilon$.
   On a :
   $$\forall \tilde{\epsilon} > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |c_n - \ell| \leq \tilde{\epsilon}.$$
   De même en appliquant cette définition à $\epsilon$ on obtient l'existence d'un $N_2$ tel que :
   $$\forall n \geq N_2, |c_n - \ell| < \epsilon.$$
   d'où l'on déduit en particulier que $c_n \leq \ell + \epsilon$ dès que $n \geq N_2$.
   (c) **[1 pt]** En déduire qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel les termes de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans l'intervalle $]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$.
   On pose $N = \max(N_1, N_2)$ et on obtient que pour tout $n \geq N$,
   $$\ell - \epsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq \ell + \epsilon.$$
   (d) **[0,5 pt]** Conclure.
   On a montré que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a
   $$|b_n - \ell| \leq \epsilon,$$
   c'est-à-dire que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$.

**Exercice 2.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \frac{3}{4}u_n - 1 \end{cases}$$

1. **[1 pt]** Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 4$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que
   $$v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{3}{4}u_n + 3 = \frac{3}{4}(u_n + 4) = \frac{3}{4}v_n.$$
   Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $3/4$.
2. **[1 pt]** Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $v_n$ en fonction de $n$.
   Montrons par récurrence que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n 6.$$
   (a) **Initialisation.** On a bien $v_0 = u_0 + 4 = 6 = \left(\frac{3}{4}\right)^0 6$.
   (b) **Hérédité.** Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons-là au rang $n+1$. On a
   $$v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n 6 = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} 6.$$

On a montré par récurrence que la propriété est vraie pour tout entier $n$.

3. **[0,5 pt]** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $u_n$ en fonction de $n$.
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que
$$u_n = v_n - 4 = \left(\frac{3}{4}\right)^n 6 - 4.$$

4. **[1 pt]** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Comme $3/4 \in ]-1, 1[$, la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Par somme, on obtient que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-4$.

**Exercice 3.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \sqrt{1 + (u_n)^2}. \end{cases}$$

1. **[1 pt]** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n+1}$.
   (a) **Initialisation.** On a bien $u_0 = 1 = \sqrt{0+1}$.
   (b) **Hérédité.** Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Montrons-là au rang $n + 1$. On a
$$u_{n+1} = \sqrt{1 + (\sqrt{n+1})^2} = \sqrt{(n+1)+1}.$$
   On a montré que la propriété est vraie pour tout entier $n$.

2. **[1,5 pt]** En revenant à la définition formelle, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
   Soit $A > 0$, on a que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq A^2$,
$$u_n = \sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \geq A.$$
   Ainsi, on a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

3. **[2,5 pt]** En revenant à la définition formelle, montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est convergente.
   On a pour $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{1 + \frac{1}{(u_n)^2}} = 1 + \frac{1}{(u_n)^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{(u_n)^2}} + 1\right)},$$
   et comme $\sqrt{1 + \frac{1}{(u_n)^2}} \geq 0$,
$$|1 - a_n| \leq \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{n+1}.$$
   Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, on a pour tout $n \geq \epsilon^{-1}$ que $n + 1 \geq \epsilon^{-1} + 1 \geq \epsilon^{-1}$ et
$$|1 - a_n| \leq \frac{1}{n+1} \leq \epsilon.$$
   On a montré que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

4. **[0,5 pt]** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes que « La suite $(\frac{x_{n+1}}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge » n'est pas une condition suffisante pour que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.
   Par les points 2 et 3, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un contre-exemple à cette assertion.

5. **[3 pt]** Sans revenir à la définition formelle, étudier la limite des suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$b_n = u_{n+1} - u_n, \quad c_n = \frac{(-1)^n}{u_n} \quad \text{et} \quad d_n = (-1)^n u_n.$$
   (a) On a pour $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq b_n = u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \leq 1/u_n$$
   Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, on a que $(1/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et le théorème des gendarmes assure que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (b) On obtient aussi que $|c_n| = 1/u_n$ donc la suite $(|c_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, tout comme $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{2n} = u_{2n}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, on a que la sous-suite $(d_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. De même, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{2n+1} = -u_{2n+1}$, on obtient que la sous-suite $(d_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$. On peut en particulier conclure que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

6. **[0,5 pt]** Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. La condition « $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{n+1} - y_n = 0$ » est-elle suffisante pour que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente ? (Justifier votre réponse).
   Comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne un contre-exemple à cette assertion.

**Exercice 4.** On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} u_n &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\ v_n &= u_n + \dfrac{3}{n}. \end{cases}$$

1. **[2 pt]** Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)^2 > 0,$$
   et
   $$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n} = \frac{n + 3n - 3(2n+1)}{n(n+1)^2} = -\frac{2n+3}{n(n+1)^2} < 0.$$
   Ainsi les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont respectivement strictement croissante et décroissante.
2. **[0,5 pt]** Montrer que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant v_n$.
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$u_n - v_n = -3/n < 0.$$
3. **[2 pt]** En revenant à la définition formelle, montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
   On fixe $\epsilon > 0$. On a pour tout entier $n \geq \frac{3}{\epsilon}$ que
   $$|u_n - v_n| \leq 3/n \leq \epsilon.$$
   Ainsi, la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. **[0,5 pt]** Que vient-on de montrer sur les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ?
   On a montré que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite.