Devoir de contrôle continu n°2

vendredi 17 mars 2017

Durée : 2h. Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.
La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. Questions de cours

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in \mathbb{R}$. Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
   (a) « $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ »
   (b) « f est continue en x_0 »
2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour f.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est continue, et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. L'objectif de l'exercice est de montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

1. Traduire à l'aide de quantificateurs l'assertion « $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ».
2. Montrer qu'il existe $B \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \geqslant B \Rightarrow |f(x)| \leqslant 1$.
3. On définit la fonction $g : [0, B] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0, B]$. Justifier que g est bornée.
4. En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leqslant C$ pour tout $x \in [0, B]$.
5. Déduire de ce qui précède, que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - xE\left(\frac{1}{x}\right),$$

où l'on rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la « partie entière » $E(t)$ est l'unique nombre entier qui vérifie $E(t) \leqslant t < E(t) + 1$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la limite de f en 0.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\;t - 1 < E(t) \leqslant t$.
2. En déduire que pour tout $x > 0$, on a $x > f(x) \geqslant 0$.
3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, par quelle valeur ? Justifier la réponse.
4. Montrer que pour $x > 1$, on a $f(x) = 1$.
5. Calculer $f(1)$. La fonction f est-elle continue en 1 ?

Exercice 4. Calcul de limites.

Calculer, en utilisant les limites connues des fonctions usuelles, les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 5 + \exp(1/x)}{(x+1)^3}$,
2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$,
3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(\tan x)^2}{\cos(2x) - 1}$,
4. $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} (x^3 - 1) \ln(2x^2 + x - 3)$.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction

$$f_n(x) = -1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n.$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est strictement croissante, et continue.
2. Calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$. En déduire qu'il existe $x_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
   On note $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de réels ainsi construite.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.
4. En déduire que $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.
5. Déduire, des questions précédentes, que $f_{n+1}(x_n) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1})$, puis que $x_n \geqslant x_{n+1}$.
6. Montrer que la suite (x_n) est convergente.