Aix-Marseille Université **Année 2016-2017**
Licence Mathématiques et Informatique Analyse 1

Devoir de contrôle continu n°2

vendredi 17 mars 2017

Durée : 2h. Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in \mathbb{R}$. Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
   (a) « $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ »

   Réponse. $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, si $|x - x_0| < \alpha$ alors $f(x) \leqslant A$. Il est inutile (mais pas faux) de préciser que A doit être négatif ; il est équivalent de mettre une inégalité stricte à la fin ; au lieu de spécifier que $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ on peut supposer que $0 < |x - x_0| < \alpha$; voici une formulation équivalente : $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x - x_0| < \alpha$ alors $f(x) < A$.

   (b) « f est continue en x_0 »

   Réponse. $\forall \epsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, si $|x - x_0| < \alpha$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. À noter que ici il est inutile (mais pas faux) de préciser que x doit être différent de x_0.

2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour f.

   Réponse. Si f est continue et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposées ($f(a).f(b) \leqslant 0$) alors f s'annule entre a et b, c'est-à-dire il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$; si de plus on suppose $f(a)$ et $f(b)$ non nuls ($f(a).f(b) < 0$) alors c est strictement entre a et b ($c \in]a, b[$).

   Une autre forme du théorème, équivalente à la précédente est : si f est continue et y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ ($y \in [f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$) alors f atteint la valeur y entre a et b, c'est-à-dire il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$; si de plus y est strictement entre $f(a)$ et $f(b)$ alors x est strictement entre a et b.

   Attention, ne pas confondre cette seconde forme avec sa réciproque qui est fausse en générale : même si f est continue ça n'est pas parceque x est entre a et b qu'il existe un y entre $f(a)$ et $f(b)$ tel que $y = f(x)$, autrement dit il se peut que $f(x)$ ne soit pas entre $f(a)$ et $f(b)$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est continue, et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. L'objectif de l'exercice est de montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

1. Traduire à l'aide de quantificateurs l'assertion « $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ».

   Réponse. $\forall \epsilon > 0$, $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+$, si $x \geqslant A$ alors $|f(x)| < \epsilon$.

2. Montrer qu'il existe $B \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \geqslant B \Rightarrow |f(x)| \leqslant 1$.

   Réponse. Comme f tend vers 0 en $+\infty$, d'après la question précédente appliquée à $\epsilon = 1$ (qui est donc bien strictement positif) il existe un réel B tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, si $x \geqslant B$ alors $|f(x)| < 1$ et donc $|f(x)| \leqslant 1$. De plus comme x est positif ($x \in \mathbb{R}_+$) on peut choisir B positif : si B est négatif la proposition reste vraie en remplaçant B par 0.

3. On définit la fonction $g : [0, B] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0, B]$. Justifier que g est bornée.

   Réponse. Remarque : la fonction g est appelée la *restriction* de f à $[0, B]$ et souvent notée $f\restriction_{[0,B]}$.

   Comme $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0, B]$, g est continue sur $[0, B]$ (puisque f est continue, donc en particulier est continue en tout point de $[0, B]$). Par conséquent g admet un minimum et un maximum sur $[0, B]$ c'est-à-dire qu'il existe des réels m et M tels que pour tout $x \in [0, B]$ on a $m \leqslant g(x) \leqslant M$, ce qui revient à dire que g est bornée.

4. En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leqslant C$ pour tout $x \in [0, B]$.

   Réponse. Comme $g(x) = f(x)$ sur $[0, B]$ on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [0, B]$. On en déduit[1] que $|f(x)| \leqslant \max(|m|, |M|)$. Il suffit donc de prendre $C = \max(|m|, |M|)$.

1. C'est une conséquence du théorème suivant (qui est une propriété classique des valeurs absolues, supposée connue et que l'on ne demandait donc pas de démontrer) : si $a \leqslant c \leqslant b$ alors $|c| \leqslant \max(|a|, |b|)$.

On suppose que $a \leqslant c \leqslant b$. Il y a trois cas à regarder : soit $0 \leqslant a$ auquel cas a, b et c étant positifs on a $|a| = a$, $|b| = b$ et $|c| = c$ d'où $|a| \leqslant |c| \leqslant |b|$. Soit $b \leqslant 0$ auquel cas, a, b et c étant négatifs on a $|a| = -a$, $|b| = -b$ et $|c| = -c$ d'où $|b| \leqslant |c| \leqslant |a|$. Soit enfin $a \leqslant 0$ et $b \geqslant 0$; ce cas se décompose à son tour en deux sous-cas : si $|a| \leqslant |b|$ on a $-|b| \leqslant -|a| = a \leqslant c \leqslant b = |b|$ donc $|c| \leqslant |b|$; si au contraire $|b| \leqslant |a|$ alors $-|a| = a \leqslant c \leqslant b = |b| \leqslant |a|$ donc $|c| \leqslant |a|$. On a ainsi épuisé tous les cas possibles et vérifié dans chacun que $|c| \leqslant |a|$ ou $|c| \leqslant |b|$, donc que $|c| \leqslant \max(|a|, |b|)$.

5. Déduire de ce qui précède, que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

   RÉPONSE. Lorsque $x \in [0, B]$ on vient de voir que $|f(x)| \leqslant C$; mais d'après la question 2, lorsque $x \geqslant B$ on a $|f(x)| \leqslant 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $|x| \leqslant \max(C, 1)$; f est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 3

On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - xE\Big(\frac{1}{x}\Big),$$

où l'on rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la « partie entière » $E(t)$ est l'unique nombre entier qui vérifie $E(t) \leqslant t < E(t) + 1$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la limite de f en 0.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R},\ \ t - 1 < E(t) \leqslant t$.

   RÉPONSE. Par définition on a $E(t) \leqslant t < E(t)+1$ donc en soustrayant 1 à la seconde inéquation on obtient $t-1 < E(t)$ et la première inéquation nous donne l'encadrement demandé : $t - 1 < E(t) \leqslant t$.

2. En déduire que pour tout $x > 0$, on a $x > f(x) \geqslant 0$.

   RÉPONSE. Posons $t = 1/x$ dans l'encadrement ci-dessus, ce qui nous donne :

$$\begin{array}{rl} 1/x - 1 < E(1/x) \leqslant 1/x & \\ 1 - x < xE(1/x) \leqslant 1 & \text{en multipliant par } x \text{ qui est supposé strictement positif} \\ x - 1 > -xE(1/x) \geqslant -1 & \text{en multipliant par } -1 \\ x > 1 - xE(1/x) = f(x) \geqslant -1 & \text{en ajoutant 1.} \end{array}$$

3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, par quelle valeur ? Justifier la réponse.

   RÉPONSE. De la question précédente on déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; en effet si $\epsilon > 0$, on choisit $\alpha = \epsilon$ de façon que si $0 < x < \alpha$ on a $|f(x)| = f(x)$ car $f(x) \geqslant 0$ d'où $|f(x)| < x < \alpha = \epsilon$.

   Comme f admet une limite finie en 0, elle est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $g(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

4. Montrer que pour $x > 1$, on a $f(x) = 1$.

   RÉPONSE. Si $x > 1$ alors $0 \leqslant 1/x < 1$, donc $E(1/x) = 0$ par définition de la partie entière, et par conséquent $f(x) = 1 - xE(1/x) = 1$.

5. Calculer $f(1)$. La fonction f est-elle continue en 1 ?

   RÉPONSE. $f(1) = 1 - 1 \times E(1/1) = 0$ (car $E(1/1) = E(1) = 1$). Or $f(x) = 1$ dès que $x > 1$, donc $\lim x \to 1^+ f(x) = 1 \neq f(1)$; la fonction f n'est donc pas continue en 1 (sa limite à droite est différente de sa valeur).

EXERCICE 4 (Calcul de limites.)

Calculer, en utilisant les limites connues des fonctions usuelles, les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + 5 + \exp(1/x)}{(x+1)^3}$,

   RÉPONSE. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + 5 + \exp(1/x)}{(x+1)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{(x+1)^3} + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{(x+1)^3} + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(1/x)}{(x+1)^3}$; on calcule ces trois limites.

   Quand $x \to +\infty$ on a :
   - $(x+1)^3 \to +\infty$ donc $5/(x+1)^3 \to 0$;
   - $1/x \to 0$ donc (la fonction exponentielle est continue en 0) $e^{1/x} \to 1$ et par conséquent $e^{1/x}/(x+1)^3 \to 0$;
   - $\dfrac{x^2}{(x+1)^3} \to 0$ car le polynôme au dénominateur est de degré strictement inférieur à celui du numérateur ; on peut retrouver ce résultat par le calcul suivant : $\dfrac{x^2}{(x+1)^3} = \dfrac{x^2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \dfrac{x^2}{x^2(x + 3 + 3/x + 1/x^2)} = \dfrac{1}{x + 3 + 3/x + 1/x^2}$. Or $1/x^2 \to 0$, $3/x \to 0$, $3 \to 3$ et $x \to +\infty$ donc $x + 3 + 3/x + 1/x^2 \to +\infty$ et par conséquent $1/(x + 3 + 3/x + 1/x^2) \to 0$.

   Les 3 limites sont donc nulles, leur somme également et finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + 5 + \exp(1/x)}{(x+1)^3} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$,

Réponse. Comme on calcule la limite en $+\infty$ on peut supposer x positif, donc on a $\sqrt{x^2} = |x| = x$ et $(\sqrt{x^2+x+1})^2 = |x^2+x+1| = x^2+x+1$. On a alors le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x+1} - x &= \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2(1+1/x+1/x^2)}+x} \\
&= \frac{x+1}{x\sqrt{1+1/x+1/x^2}+x} \\
&= \frac{x(1+1/x)}{x(\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1)} \\
&= \frac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1}
\end{aligned}$$

Lorsque $x \to \infty$, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 2, le résultat est donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x) = \dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\tan x)^2}{\cos(2x)-1}$,

   Réponse. On sait (trigonométrie élémentaire) que $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ donc $\cos 2x - 1 = 2\cos^2 x - 2 = -2(1-\cos^2 x) = -2\sin^2 x$, ce qui nous donne, quand $x \neq 0$ mais proche de 0 (par exemple $x \in [-\pi/4, \pi/4]$) :

$$\begin{aligned}
\frac{\tan^2 x}{\cos 2x - 1} &= \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{-2\sin^2 x} \\
&= \frac{-\sin^2 x}{2\cos^2 x \sin^2 x} \\
&= \frac{-1}{2\cos^2 x}
\end{aligned}$$

   Lorsque $x \to 0$, $\cos x \to 1$, donc $\cos^2 x \to 1$ et finalement : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan x)^2}{\cos(2x)-1} = -\dfrac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^3-1)\ln(2x^2+x-3)$.

   Réponse. Comme $2x^2+x-3$ s'annule en $x=1$, (c'est la raison pour laquelle cette limite est en forme indéterminée) on peut factoriser $2x^2+x-3$ par $x-1$ ce qui donne : $2x^2+x-3 = (x-1)(x+3)$. De plus x^3-1 s'annulant également en 1, se factorise également par $x-1$ et on a (cf cours sur les racines de l'unité au premier semestre) : $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
(x^3-1)\ln(2x^2+x-3) &= (x-1)(x^2+x+1)\ln((x-1)(x+3)) \\
&= (x^2+x+1)(x-1)\ln(x-1) + (x^2+x+1)(x-1)\ln(x+3)
\end{aligned}$$

   Quand $x \to 1^+$ (x tend vers 1 à droite) on a $x^2+x+1 \to 3$, $x-1 \to 0$ (par valeurs positives puisque $x > 1$) donc $\ln(x-1) \to -\infty$ et par les théorèmes de croissance comparée, $(x-1)\ln(x-1) \to 0$ donc également $(x^2+x+1)(x-1)\ln(x-1) \to 0$. Comme par ailleurs $x+3 \to 4$ donc $(x-1)\ln(x+3) \to 0$ donc $(x^2+x+1)(x-1)\ln(x+3) \to 0$ on déduit finalement : $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^3-1)\ln(2x^2+x-3) = 0$

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction

$$f_n(x) = -1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n.$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est strictement croissante, et continue.

   Réponse. La fonction f_n est somme de fonctions (la fonction constante $x \mapsto -1$ et les fonctions $x \mapsto x^k$ pour $k = 1, \dots, n$) toutes continues sur $\mathbb{R}_+$ (et même sur $\mathbb{R}$) ; f_n est donc continue sur $\mathbb{R}_+$.

   D'autre part sur $\mathbb{R}_+$ chaque fonction $x \mapsto x^k$ est strictement croissante donc leur somme l'est aussi, et par conséquent f_n également.

2. Calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$. En déduire qu'il existe $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de réels ainsi construite.

   Réponse. $f_n(0) = -1 + 0 + 0^2 + \cdots + 0^n = -1$; $f_n(1) = -1 + 1 + 1^2 + \cdots + 1^n = -1 + n = n - 1$.

   D'après le calcul précédent $f_n(0)$ et $f_n(1)$ sont de signes opposés, comme f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0,1]$ on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il existe donc $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Noter que si $n > 1$ alors $f_n(1) = n - 1 > 0$ et comme $f_n(0) = -1 < 0$ on en déduit que x_n ne peut être 0 ou 1, c'est-à-dire que $x_n \in]0,1[$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

   RÉPONSE. On a $f_{n+1}(x) = -1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1} = f_n(x) + x^{n+1}$. Mais comme $x \in \mathbb{R}_+$ on a $x^{n+1} \geqslant 0$ donc $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$

4. En déduire que $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.

   RÉPONSE. On applique la question précédente à $x = x_n$ et on obtient $f_{n+1}(x_n) \geqslant f_n(x_n)$ mais par définition de x_n on a $f_n(x_n) = 0$ donc $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.

5. Déduire des questions précédentes que $f_{n+1}(x_n) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1})$, puis que $x_n \geqslant x_{n+1}$.

   RÉPONSE. On vient de voir que $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$; par définition de x_{n+1} on a $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ donc $f_{n+1}(x_n) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1})$. Or si $x_n < x_{n+1}$, comme f_{n+1} est strictement croissante on aurait $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$; par conséquent $x_n \geqslant x_{n+1}$.

6. Montrer que la suite (x_n) est convergente.

   RÉPONSE. D'après la question précédente la suite (x_n) est décroissante ; elle est minorée puisque par définition $x_n \in [0, 1]$ pour chaque n. Donc elle converge (une suite de réels décroissante minorée converge).