Faculté des Sciences Aix Marseille Université

Année universitaire 2016/2017

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1$^{\text{er}}$ semestre ☒ 2$^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence Math-Info
Code du module : SMI2U1 Libellé du module : Analyse 1
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1 (Questions de cours [4 pt])

1. [0,5 pt] Donner la définition formelle de : « la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers π ».
2. [0,5 pt] Donner la définition formelle de : « la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tend vers π en 1 ».
3. [1,5 pt] Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis.
4. [1,5 pt] Donner la définition formelle de : « la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0 ».

Exercice 2 (Exemple d'une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 mais qui n'est pas dérivable 2 fois [9 pt])

Soit $f : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. [0,5 pt] Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
2. [1 pt] Montrer que f admet une limite l en 0 que l'on calculera.

On en déduit que f est prolongeable par continuité et on définit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = l$, la limite calculée à la question précédente.

3. [2 pt] Calculer la dérivée et la dérivée seconde de g en $x \in \mathbb{R}^*$.
4. [1 pt] Montrer que g est dérivable en 0 et calculer sa dérivée en 0.
5. [1 pt] Montrer que la fonction $g' : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est continue en 0.
6. [2 pt] Montrer que la fonction g' n'est pas dérivable en 0.
7. [1 pt] Montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $g(x) = x^2\varepsilon(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$.
8. [0,5 pt] Déduire de ce qui précède que g admet un développement limité d'ordre 2 (lequel ?) en 0.

Exercice 3 (Concavité de ln [7 pt])

Soit deux réels a et b tels que $0 < a < b$.

1. [1 pt] Montrer que : $a < \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a} < b$ (cette question est indépendante de la suite).

On définit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ par $f(t) = \ln((1-t)a + tb) - (1-t)\ln a - t\ln b$.

2. [1 pt] Justifier que f est dérivable, de dérivée continue (f est de classe C^1) sur $[0,1]$ et calculer sa dérivée f'.
3. [1 pt] Montrer qu'il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $f'(t_0) = 0$
4. [1 pt] Justifier que f' est dérivable sur $[0,1]$ et calculer sa dérivée f'' (qui est donc la dérivée seconde de f).
5. [2 pt] Montrer que f' est croissante sur $[0,1]$. En déduire son signe sur $[0,1]$ puis le tableau de variation de f.
6. [1 pt] Calculer $f(0)$ et $f(1)$ et déduire de tout ce qui précède l'inégalité : $\ln((1-t)a+tb) \geqslant (1-t)\ln a + t\ln b$.

Exercice 4 (Développements limités [6 pt])

1. [5 × 0,5 = 2,5 pt] Donner les développements limités d'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :
   1.1. $x \mapsto \ln(1+x)$;
   1.2. $x \mapsto \cos(x)$;
   1.3. $x \mapsto \sin(x)$;
   1.4. $x \mapsto \cosh(x)$;
   1.5. $x \mapsto \sinh(x)$.
2. [1,5 pt] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln(1+\alpha x)$; en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$.
3. [2 pt] Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cos(x)}{\sin^3(x)}$.