Année universitaire 2016/2017

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h

Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence Math-Info

Code du module : SMI2U1 Libellé du module : Analyse 1

Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1 (Questions de cours [4 pt])

1. [0,5 pt] Donner la définition formelle de : « la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers π ».

   Réponse. $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, si $n\geqslant N$ alors $|u_n-\pi|<\varepsilon$.

2. [0,5 pt] Donner la définition formelle de : « la fonction $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ tend vers π en 1 ».

   Réponse. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, si $|x-1|<\delta$ alors $|f(x)-\pi|<\varepsilon$.

3. [1,5 pt] Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis.

   Réponse. Soient $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$; il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4. [1,5 pt] Donner la définition formelle de : « la fonction $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0 ».

   Réponse. La fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admet un DL en 0 à l'ordre 2 s'il existe $c_0,c_1,c_2\in\mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tels que :
   - $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+x^2\varepsilon(x)$ et
   - $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

Exercice 2 (Exemple d'une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 mais qui n'est pas dérivable 2 fois [9 pt])

Soit $f:\mathbb{R}^*\mapsto\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. [0,5 pt] Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

   Réponse. $x\mapsto\frac{1}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et $x\mapsto\sin(x)$, $x\mapsto x^3$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par composition et produit, f est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. [1 pt] Montrer que f admet une limite l en 0 que l'on calculera.

   Réponse. $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $|f(x)|=|x^3\sin(\frac{1}{x})|=|x^3|.|\sin(\frac{1}{x})|\leqslant|x^3|\xrightarrow[x\to 0]{}0$ donc par encadrement $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}f(x)=0$ et $\ell=0$.

On en déduit que f est prolongeable par continuité et on définit $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ par : $g(x)=f(x)$ si $x\neq 0$ et $g(0)=l$, la limite calculée à la question précédente.

3. [2 pt] Calculer la dérivée et la dérivée seconde de g en $x\in\mathbb{R}^*$.

   Réponse. $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $g'(x)=3x^2\sin(\frac{1}{x})-x\cos(\frac{1}{x})$ et $g''(x)=(6x-\frac{1}{x})\sin(\frac{1}{x})-4\cos(\frac{1}{x})$.

4. [1 pt] Montrer que g est dérivable en 0 et calculer sa dérivée en 0.

   Réponse. On étudie la limite en 0 du taux d'accroissement $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$. On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

   $$\left|\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right|=\left|\frac{x^3\sin(\frac{1}{x})}{x}\right|=\left|x^2\sin(\frac{1}{x})\right|\leqslant|x^2|\xrightarrow[x\to 0]{}0.$$

   Par encadrement on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$. La fonction g est donc dérivable en 0 et $g'(0)=0$.

5. [1 pt] Montrer que la fonction $g':\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ est continue en 0.

   Réponse. On étudie la limite en 0 de $g'(x)$. On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $|g'(x)|=|3x^2\sin(\frac{1}{x})-x\cos(\frac{1}{x})|\leqslant|3x^2\sin(\frac{1}{x})|+|x\cos(\frac{1}{x})|=|3x^2|.|\sin(\frac{1}{x})|+|x|.|\cos(\frac{1}{x})|\leqslant 3|x^2|+|x|\xrightarrow[x\to 0]{}0$.

   Par encadrement on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}g'(x)=0$. Comme $g'(0)=0$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}g'(x)=g'(0)$ ce qui prouve la continuité de g' en 0.

6. [2 pt] Montrer que la fonction g' n'est pas dérivable en 0.

Réponse. On étudie la limite en 0 du taux d'accroissement $\tau(x) = \dfrac{g'(x) - g'(0)}{x - 0}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $\tau(x) = 3x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ donc $\cos(\frac{1}{x}) = 3x\sin(\frac{1}{x}) - \tau(x)$. Or $3x\sin(\frac{1}{x}) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$; si $\tau(x)$ admettait une limite en 0 alors il en serait de même de $\cos(\frac{1}{x})$ mais on sait que la fonction $x \mapsto \cos(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0.

On peut également appliquer le théorème de continuité séquentielle : si τ admet une limite l_0 en 0 alors pour toute suite (w_n) qui tend vers 0, la suite $\tau(w_n)$ tend vers l_0.
Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = \frac{1}{2n\pi}, n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, n \in \mathbb{N}.$$

On a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$; par contre :

$$\lim_{n\to+\infty} \tau(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2n\pi}\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1$$
$$\lim_{n\to+\infty} \tau(v_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) - \cos(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 0.$$

Les deux limites sont différentes, ce qui contredit l'hypothèse que τ admet une limite.

7. [1 pt] Montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $g(x) = x^2\varepsilon(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

Réponse. On a $g(x) = x^3\sin(1/x) = x^2(x\sin(1/x))$. Si on pose $\varepsilon(x) = x\sin(1/x)$ on a donc bien $g(x) = x^2\varepsilon(x)$. De plus $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ car $|x\sin(1/x)| \leqslant |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. La fonction $x \mapsto x\sin(1/x)$ est donc la fonction ε recherchée.

8. [0,5 pt] Déduire de ce qui précède que g admet un développement limité d'ordre 2 (lequel ?) en 0.

Réponse. D'après les questions précédentes, il existe $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (à savoir $c_0 = c_1 = c_2 = 0$) et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (à savoir la fonction définie à la question précédente) tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + x^2\varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ ce qui prouve que g admet un DL en 0 à l'ordre 2.

Exercice 3 (Concavité de ln [7 pt])

Soit deux réels a et b tels que $0 < a < b$.

1. [1 pt] Montrer que : $a < \dfrac{b - a}{\ln b - \ln a} < b$ (cette question est indépendante de la suite).

Réponse. La fonction ln étant continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} = \ln'(c) = \dfrac{1}{c}$. On obtient $c = \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)}$ et comme $c \in]a, b[$ on en déduit que $a < \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} < b$.

On définit $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ par $f(t) = \ln((1 - t)a + tb) - (1 - t)\ln a - t\ln b$.

2. [1 pt] Justifier que f est dérivable, de dérivée continue (f est de classe C^1) sur $[0, 1]$ et calculer sa dérivée f'.

Réponse. Pour tout t dans $[0, 1]$, $(1 - t)a + tb \in [a, b]$. Comme la fonction ln est dérivable et de dérivée continue sur $[a, b]$ on en déduit par composition que $t \mapsto \ln((1 - t)a + tb)$ est dérivable et de dérivée continue sur $[0, 1]$. De plus, $t \mapsto -(1 - t)\ln(a) - t\ln(b)$ est dérivable et de dérivée continue sur $[0, 1]$ comme fonction polynomiale. Par somme, il en est de même pour f.
Un rapide calcul nous donne pour $t \in [0, 1]$:

$$f'(t) = \frac{b - a}{(1 - t)a + tb} + \ln(a) - \ln(b).$$

3. [1 pt] Montrer qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $f'(t_0) = 0$.

Réponse. On vérifie facilement que $f(0) = f(1) = 0$, f étant dérivable sur $[0, 1]$, on en déduit par le théorème de Rolle qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $f'(t_0) = 0$.
On peut aussi (mais ça n'était pas demandé) déterminer la valeur de t_0 par le calcul en résolvant l'équation $f'(t_0) = 0$ ce qui donne $t_0 = \dfrac{1}{\ln(b) - \ln(a)} - \dfrac{a}{b - a}$. Il faut alors vérifier que t_0 est bien dans $]0, 1[$. Or on a

$$t_0 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ln(b) - \ln(a)} - \frac{a}{b - a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b - a}{\ln(b) - \ln(a)} > a;$$
$$t_0 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ln(b) - \ln(a)} - \frac{a}{b - a} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b - a}{\ln(b) - \ln(a)} < a + b - a = b.$$

Ainsi on se ramène aux deux inéquations démontrées question 1).

4. [1 pt] Justifier que f' est dérivable sur $[0,1]$ et calculer sa dérivée f'' (qui est donc la dérivée seconde de f).

RÉPONSE. La fonction f' est continue et dérivable pour tout $t \in [0,1]$ satisfaisant $(1-t)a + tb \neq 0$ c'est à dire pour $t \neq \frac{-a}{b-a}$. Or $\frac{-a}{b-a} < 0$ donc f' est dérivable pour tout $t \in [0,1]$ et

$$f''(t) = -\frac{(b-a)^2}{[(1-t)a+tb]^2}.$$

5. [2 pt] Montrer que f' est croissante sur $[0,1]$. En déduire son signe sur $[0,1]$ puis le tableau de variation de f.

RÉPONSE. Pour tout t dans $[0,1]$, $f''(t) < 0$ ce qui prouve que f' est strictement décroissante et non pas croissante comme demandée. Comme on a vu que f' s'annule en t_0 on en déduit que f' est positive entre 0 et t_0, négative entre t_0 et 1, ce qui donne le tableau de variations suivant :

t	0		t_0		1
$f'(t)$	$f'(0)$	$+$	0	$-$	$f'(1)$
$f(t)$	0	$\nearrow$	$f(t_0)$	$\searrow$	0

6. [1 pt] Calculer $f(0)$ et $f(1)$ et déduire de tout ce qui précède l'inégalité : $\ln((1-t)a+tb) \geqslant (1-t)\ln a + t\ln b$.

RÉPONSE. On a $f(0) = f(1) = 0$. D'après le tableau de variations, on a $f(t) \geqslant 0$ pour tout t dans $[0,1]$, ce qui est équivalent à :

$$\ln((1-t)a+tb) \geqslant (1-t)\ln(a) + t\ln(b) \geqslant 0.$$

EXERCICE 4 (Développements limités [6 pt])

1. [$5 \times 0,5 = 2,5$ pt] Donner les développements limités d'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

 1.1. $x \mapsto \ln(1+x)$;

RÉPONSE. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_1(x)$.

 1.2. $x \mapsto \cos(x)$;

RÉPONSE. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_2(x)$.

 1.3. $x \mapsto \sin(x)$;

RÉPONSE. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_3(x)$.

 1.4. $x \mapsto \cosh(x)$;

RÉPONSE. $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_4(x)$.

 1.5. $x \mapsto \sinh(x)$.

RÉPONSE. $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_5(x)$.

 où les fonctions ε_i tendent vers 0 en 0.

2. [1,5 pt] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\ln(1+\alpha x)$; en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n$.

RÉPONSE. On a $\ln(1+x) = x + x\varepsilon(x)$ où ε est une fonction qui tend vers 0 en 0. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on obtient pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{x}\ln(1+\alpha x) = \frac{1}{x}(\alpha x + \alpha x\varepsilon(\alpha x)) = \alpha + \alpha\varepsilon(\alpha x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \alpha.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{\alpha}{n})}$$

Posons $x_n = 1/n$; donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(1+\alpha x)$ est continue en 0^+ on en déduit que

$$n\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) = \frac{1}{x_n}\ln(1+\alpha x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$$

Par continuité de la fonction exponentielle on en déduit que

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\alpha}$$

3. [2 pt] Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cos(x)}{\sin^3(x)}$.

Réponse. En reprenant les DL de la première question on a les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
\sin(x)\cosh(x) &= (x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_3(x))(1 + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_4(x)) \\
&= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \\
\sinh(x)\cos(x) &= (x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_5(x))(1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_2(x)) \\
&= x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon'(x) \\
&= x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon'(x) \\
\sin(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cos(x) &= \frac{2x^3}{3} + x^3\varepsilon''(x)
\end{aligned}$$

D'autre part le DL d'ordre 1 de sin est $\sin(x) = x + x\eta(x)$ donc par multiplication on obtient $\sin^3(x) = x^3 + x^3\eta'(x)$. Dans tous ces calculs les fonctions ε et η sont des restes tendant vers 0 en 0. Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cos(x)}{\sin^3(x)} &= \frac{\frac{2x^3}{3} + x^3\varepsilon''(x)}{x^3 + x^3\eta'(x)} \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{1 + \varepsilon''(x)}{1 + \eta'(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

puisque comme on a dit $\varepsilon''(x)$ et $\eta'(x)$ tendent vers 0 en 0.