Université d'Aix-Marseille
Semestre 2

Licence de Mathématiques
2015-2016

Analyse 1
Devoir maison - Suites numériques

Lorsque l'on place au taux annuel de 24% la banque propose en général de calculer l'intérêt au taux mensuel de $24/12 = 2\%$. Question : cette opération (obtenir le taux mensuel en divisant par 12 le taux annuel) est-elle correcte ? Autrement dit l'intérêt calculé sera-t-il le même dans les deux cas ? Et si non, qu'est ce qui est le plus avantageux : calculer l'intérêt en appliquant le taux annuel de 24% une fois, ou 12 fois le taux mensuel de 2% ? Et si la banque proposait un taux quotidien de $24/365 = 0.0657\%$ par jour, serait-ce pareil, plus ou moins avantageux ?
Paramétrons le problème : on a une somme S au taux annuel de $x = p\%$ (dans l'exemple ci-dessus $x = 0,24$) c'est-à-dire que au bout d'un an l'intérêt s'élève à $S \times x$ si bien que la somme placée est passée à $S + S \times x = S(1+x)$. Si on calcule par mois en pratiquant un taux mensuel de $x/12$, au bout du premier mois la somme placée est devenue $S_1 = S \times (1 + x/12)$, donc au deuxième mois c'est $S_2 = S_1 \times (1 + x/12) = S \times (1 + x/12)^2$..., au douzième mois ça sera $S_{12} = S \times (1 + x/12)^{12}$. La question est donc de comparer $1 + x$ et $(1 + x/12)^{12}$, et plus généralement de voir comment se comporte $(1 + x/n)^n$.
Soit x un nombre réel (on a pas besoin de supposer x positif). On définit la suite numérique :

$$u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

On va montrer que u_n est une suite croissante qui converge. Le fait que la suite soit croissante montre que appliquer 12 fois le taux mensuel de 2% est plus avantageux que d'appliquer une seule fois un taux annuel de 24%.
Petite question préliminaire pour commencer

1. Montrer l'*l'inégalité de Bernouilli* par récurrence sur n : pour tout réel $x \geq -1$ on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

2. Montrer que[1] :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n + x + 1}{n + 1}\left(1 - \frac{x}{(n + x)(n + 1)}\right)^n$$

3. En déduire que la suite (u_n) est ultimement croissante.

On fixe maintenant un nouveau paramètre : k est un entier relatif de même signe que x et tel que $|k| > |x|$. On définit une nouvelle suite $(v_n)_{n\geq k}$ par :

$$v_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+k}.$$

4. Montrer que :

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{n + 1}{n + x + 1}\left(1 + \frac{x}{n(n + x + 1)}\right)^{n+k}$$

5. En déduire que[2] :

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \geq 1 + \frac{(k - x)n + k}{n(n + x + 1)^2}x$$

puis en discutant selon le signe de x que (v_n) est ultimement strictement décroissante.

6. Calculer u_n/v_n ; en déduire en discutant selon le signe de x que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes, donc ont même limite que l'on va noter $e(x)$.

La suite du problème va consister à montrer que la fonction $e(x)$ que l'on vient de définir est la fonction exponentielle ; plus précisément on va montrer que $e(x).e(y) = e(x + y)$, ce qui est l'une des caractérisations de la fonction exponentielle. On va voir deux démonstrations de ce fait, la seconde utilise une assez jolie astuce. Mais commençons par quelques résultats qui n'ont (apparemment) rien à voir.

1. Attention il y avait une erreur dans une version préliminaire de l'énoncé où il était écrit $1 - \frac{1}{(n + x)(n + 1)^2}$ au lieu de $1 - \frac{x}{(n + x)(n + 1)^2}$.

2. Il y avait une seconde erreur : il était écrit $1 + \frac{(k - x) + k}{n(n + x + 1)^2}x$ au lieu de $1 + \frac{(k - x)n + k}{n(n + x + 1)^2}x$.

7. Soit u un nombre réel strictement positif ; montrer que $\sqrt[n]{u} \to 1$.

8. Soit (u_n) une suite convergente de limite un réel u strictement positif ; montrer que $\sqrt[n]{u_n} \to 1$.

9. Soit b un réel quelconque ; montrer que $(1 + b/n^2)^n \to 1$.

10. En déduire que $e(x).e(-x) = 1$.

Ce résultat implique que $e(x) > 0$ pour tout réel x ce qui sera utile plus tard. C'est une première propriété caractéristique de la fonction exponentielle, mais on va maintenant aller plus loin. Voici la suite de la première démonstration.

11. Soit b un réel quelconque et u_n une suite convergente de limite 1 ; montrer que $(1 + b/(n^2 u_n))^n \to 1$.

12. Soit a et b deux réels quelconques ; montrer que $(1 + a/n + b/n^2)^n \to e(a)$

13. Montrer que $e(x).e(y) = e(x + y)$.

Et voici la seconde démonstration de cette égalité, un peu plus astucieuse ; on a besoin d'encore un résultat préliminaire.

14. Montrer que si $-1 < \epsilon < 1$ alors pour tout entier n on a $1 + \epsilon \leq (1 + \epsilon/n)^n \leq 1/(1 - \epsilon)$.

15. En déduire que si $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergeant vers 0 alors la suite des $(1 + \epsilon_n/n)^n$ converge vers 1.

16. Montrer que $e(-x).e(-y).e(x + y) = 1$ et en (re)déduire l'égalité cherchée.

Ce qui donne une seconde propriété caractéristique de la fonction exponentielle. En fait à ce stade on a quasiment fini de prouver que la fonction $e(x)$ est la fonction exponentielle mais pour aller plus loin il faudrait utiliser des résultats que l'on verra en L2, notamment des théorèmes donnant les conditions sous lesquelles une suite de fonctions continues commes la suite des $(1 + x/n)^n$ converge vers une fonction continue.

Indications. Certaines des questions ci-dessus nécessitent des astuces parfois peu simples à trouver ; pour ceux qui sèchent voici quelques pistes.
Question 7 : poser $v = \sqrt[n]{u}$ et utiliser l'identité remarquable $v^n - 1 = (v - 1)(v^{n-1} + v^{n-2} + \cdots + 1)$.
Question 8 : encadrer u_n (pour n assez grand) par deux valeurs proches de u, donc strictement positives, appliquer la question précédente et conclure par le théorème des gendarmes.
Question 9 : considérer la suite $u_n = (1 + b/n^2)^{n^2}$; on a vu dans la première partie que celle-ci converge (pourquoi ?) vers $e(b)$ qui est strictement positif. Appliquer la question précédente à u_n.
Question 11 : encadrer u_n par deux valeurs proches de 1, en déduire un encadrement de $(1 + b/(n^2 u_n))^n$ par deux suites de limite 1.
Question 12 : appliquer la question précédente au rapport $(1 + a/n + b/n^2)^n/(1 + a/n)^n$.
Question 14 : la première inégalité est conséquence directe de l'inégalité de Bernouilli ; la seconde se trouve en écrivant $(1 + \epsilon/n)$ sous la forme $\dfrac{1 - \epsilon^2/n^2}{1 - \epsilon/n}$.