L1 PCEI
Géométrie et polynômes
DS du 26 octobre 2012

Durée : 3h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 20 minutes par exo, 30 minutes au (grand) maximum. Rédiger soigneusement vos réponses en explicitant (succintement) les propriétés et méthodes que vous utilisez.

Exercice 1 On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ dans lequel on considère la droite D d'équation $y = x - 3$, le point A de coordonnées $(1, 2)$, la droite D' perpendiculaire à D et passant par A et la droite D'' parallèle à D et passant par A.

i) Donner une équation paramétrique de D'.

Réponse. L'équation de D peut s'écrire $x - y - 3 = 0$; on en déduit que le vecteur $\vec{n}(1, -1)$ est normal à D. La droite D' est donc l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire avec $\vec{n}$, c'est à dire tels qu'il existe un scalaire λ vérifiant

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{n} = \lambda(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = \lambda\vec{\imath} - \lambda j$$

Mais comme $\overrightarrow{AM} = (x - 1)\vec{\imath} + (y - 2)\vec{\jmath}$ on en déduit l'équation paramétrique de D' :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$$

ii) Donner une équation cartésienne de D'.

Réponse. D'après l'équation de D on voit que les deux points $B(0, -3)$ et $C(3, 0)$ appartiennent à D, donc que le vecteur $\overrightarrow{BC} = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ est directeur de D. La droite D' est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}$ c'est à dire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$. Comme

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = ((x - 1)\vec{\imath} + (y - 2)\vec{\jmath}).(3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}) = 3(x - 1) + 3(y - 2) = 3(x + y - 3)$$

on en déduit une équation cartésienne de D' :

$$x + y - 3 = 0$$

iii) Donner une équation cartésienne de D''.

Réponse. Comme $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de D et D'' est parallèle à D, $\overrightarrow{BC}$ est aussi directeur de D'' qui est donc l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, c'est à dire tels que $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}) &= \begin{vmatrix} x - 1 & 3 \\ y - 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3(x - 1) - 3(y - 2) \\ &= 3(x - y + 1) \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de D'' est donc :

$$x - y + 1 = 0$$

iv) Donner les coordonnées du point A' projeté orthogonal de A sur D.

Réponse. $A'(x, y)$ est le point de D' qui appartient à D, ses coordonnées satisfont donc :

$$x + y - 3 = 0$$
$$x - y - 3 = 0$$

En ajoutant ces deux équations on obtient $2x = 6$ donc $x = 3$ d'où l'on déduit en remplaçant dans la première, $y = 0$.
Le point A' a donc pour coordonnées : $(3, 0)$ (c'est le point C ci-dessus).
La distance de A à D est la norme du vecteur $\overrightarrow{AA'}$:

$$||\overrightarrow{AA'}|| = ||2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}|| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

v) Déterminer l'angle entre le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$ et la droite D.

Réponse. Comme $\overrightarrow{BC}$ est directeur de D, l'angle entre $\vec{u}$ et la droite D est le même que l'angle entre $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$.
Notons θ cet angle, on a donc :

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\overrightarrow{BC}}{||\vec{u}||.||\overrightarrow{BC}||}$$

On calcule séparément le produit scalaire et les deux normes :

$$\begin{aligned}
\vec{u}.\overrightarrow{BC} &= ((\sqrt{3}+1)\vec{\imath} + (\sqrt{3}-1)\vec{\jmath}).(3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}) \\
&= 6\sqrt{3} \\
||\vec{u}|| &= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2} \\
&= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\
||\overrightarrow{BC}|| &= \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$\cos\theta = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'angle (non orienté) θ entre D et $\vec{u}$ est donc $\pi/6$.

Exercice 2 Soit P le plan passant par les points $A(0, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$ et $C(-1, 1, 1)$.

i) Donner une équation paramétrique de P.

Réponse. Le plan P est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ c'est à dire tels que il existe des scalaires λ et μ vérifiant :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$$

Comme $\overrightarrow{AM} = x\vec{\imath} + (y-1)\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = \lambda(-\vec{\imath}) + \mu(-\vec{\imath} + \vec{k}) = -(\lambda+\mu)\vec{\imath} + \mu\vec{k}$ on obtient comme équation paramétrique du plan :

$$\begin{cases} x = -\lambda - \mu \\ y = 1 \\ z = \mu \end{cases}$$

ii) Donner une équation cartésienne de P.

Réponse. On voit sur la réponse à la question précédente qu'une équation cartésienne du plan est $y = 1$. Si on ne le voit pas on peut déterminer celle-ci en considérant le plan comme l'ensemble des points M tels que le produit mixte (déterminant) des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est nul et calculer :

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ y-1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = y - 1$$

ce qui permet de retrouver l'équation cartésienne annoncée : $y = 1$.
Remarque : cette équation montre que le plan P contient les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{k}$, autrement dit que le vecteur $\vec{\jmath}$ est perpendiculaire au plan.

iii) Donner une équation paramétrique de la droite D perpendiculaire à P et passant par le point $D(-\sqrt{2}, 2, \sqrt{3})$.

Réponse. Remarque : l'énoncé est maladroit car le même nom D désigne à la fois une droite et un point. Pour fixer les idées on notera D'' la droite perpendiculaire à P et passant par le point $D(-\sqrt{2}, 2, \sqrt{3})$.
Il s'agit de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{DM}$ est colinéaire au produit vectoriel de deux vecteurs du plan, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, c'est à dire tels qu'il existe un scalaire λ vérifiant :

$$\overrightarrow{DM} = \lambda(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$$

On calcule le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-\vec{\imath}) \wedge (-\vec{\imath} + \vec{k}) = \vec{\jmath}$$

ce qui permet de retrouver le résultat vu à la question précédente : $\vec{\jmath}$ est perpendiculaire au plan P. On en déduit une équation paramétrique de D'' :

$$\begin{cases} x & = -\sqrt{2} \\ y & = 2 + \lambda \\ z & = \sqrt{3} \end{cases}$$

iv) Donner les coordonnées du point D' projeté orthogonal de D sur P ; en déduire la distance de D à P.

Réponse. Le point D' est par définition sur D'' et dans P, ses coordonnées doivent donc satisfaire à la fois l'équation cartésienne de P et l'équation paramétrique de D'' ; il existe donc un scalaire λ tel que :

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ x &= -\sqrt{2} \\ y &= 2 + \lambda \\ z &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Doù l'on déduit : $D'(-\sqrt{2}, 1, \sqrt{3})$. Par conséquent $\overrightarrow{DD'} = \vec{\jmath}$, donc la distance de D à P, par définition la norme du vecteur $\overrightarrow{DD'}$, est 1.

Exercice 3 Soient $A(1,0,1)$, $B(-1,2,1)$ et $C(1,0,-1)$ trois points de l'espace.

i) Quelle est la nature de l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0}$? En donner une équation paramétrique.

Réponse. Le produit vectoriel est nul ssi les deux vecteurs sont colinéaires ; il s'agit donc de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires : c'est la droite parallèle à (BC) et passant par A.
Par définition de la colinéarité, ces deux vecteurs sont colinéaire ssi il existe un scalaire λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{BC}$, ce qui donne l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x-1=2\lambda \\ y=-2\lambda \\ z-1=-2\lambda \end{cases}$$

ii) Quelle est la nature de l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \vec{0}$? En donner une équation cartésienne.

Réponse. Remarque : il y a une erreur dans l'énoncé, il faut lire 0 au lieu de $\vec{0}$, le produit scalaire est un scalaire (comme son nom l'indique) et ne peut être égal à un vecteur.
Le produit scalaire est nul ssi les vecteurs sont orthogonaux, il s'agit donc de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthorgonal à $\overrightarrow{BC}$: c'est le plan de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$ et contenant A.
On en trouve une équation cartésienne en calculant ce produit scalaire :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = ((x-1)\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+(z-1)\vec{k}).(2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-2\vec{k}) = 2(x-y-z)$$

d'où l'équation : $x-y-z=0$.

Exercice 4 On note $a=\cos(\pi/8)$ et $b=\sin(\pi/8)$.

i) Donner la forme cartésienne de $\left(e^{i\pi/8}\right)^k$ pour $k=0,1,2,3,4$.

Réponse.

$$\begin{aligned}
\left(e^{i\pi/8}\right)^0 &= 1 \\
\left(e^{i\pi/8}\right)^1 &= e^{i\pi/8} = a+ib \\
\left(e^{i\pi/8}\right)^2 &= e^{i\pi/4} = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2 \\
\left(e^{i\pi/8}\right)^3 &= e^{3i\pi/8} \\
&= e^{i(\pi/2-\pi/8)} \\
&= \cos(\pi/2-\pi/8) + i\sin(\pi/2-\pi/8) \\
&= sin(\pi/8) + i\cos(\pi/8) \\
&= b+ia \\
\left(e^{i\pi/8}\right)^4 &= e^{i\pi/2} = i
\end{aligned}$$

À noter le résultat obtenu pour $k=3$ que l'on peut aussi obtenir en considérant que les angles $\pi/8$ et $3\pi/8$ sont symétriques par rapport à la diagonale.

ii) Calculer les valeurs de a et b.

Réponse. En vertu de la question précédente on a $\left(e^{i\pi/8}\right)^4 = (a+ib)^4 = i$. Si on développe :

$$\begin{aligned}
(a+ib)^4 &= a^4 + 4ia^3b - 6a^2b^2 - 4iab^3 + b^4 \\
&= a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + 4iab(a^2-b^2)
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires on obtient :

$$a^4 - 6a^2b^2 + b^4 = 0 \tag{1}$$
$$4ab(a^2-b^2) = 1 \tag{2}$$

Comme a et b sont les cosinus et sinus de $\pi/8$ on a $a^2 + b^2 = 1$ donc en remplaçant b^2 par $1 - a^2$ dans l'équation (1) on obtient :

$$\begin{aligned} a^4 - 6a^2b^2 + b^4 &= a^4 - 6a^2(1-a^2) + (1-a^2)^2 \\ &= 8a^4 - 8a^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation du second degré en a^2, dont le discriminant est $(-8)^2 - 4 \times 8 = 32$. Les deux racines sont donc : $a^2 = (8 \pm \sqrt{32})/16 = (2 \pm \sqrt{2})/4$. Par conséquent comme a et b sont positifs on obtient comme solutions possibles :

$$a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

On peut remarquer que ces deux solutions correspondent aux angles $\pi/8$ et $3\pi/8$; en effet comme $\left(e^{3i\pi/8}\right)^4 = e^{3i\pi/2} = -i$ on voit que l'équation (1) que l'on vient de résoudre est satisfaite par $\cos(\pi/8)$ et par $\cos(3\pi/8)$. Comme $a_1 > a_2$ et $\cos(\pi/8) > \cos(3\pi/8)$ on doit avoir $\cos(\pi/8) = a_1$ et $\cos(3\pi/8) = a_2$. De plus en raison de la symétrie entre $\pi/8$ et $3\pi/8$ on sait que $\sin(\pi/8) = \cos(3\pi/8)$, d'où $\sin(\pi/8) = a_2$.

On peut également déterminer la bonne solution en testant les deux dans l'équation (2). Tout d'abord, en utilisant $b = \sqrt{1-a^2}$ on obtient les deux valeurs correspondant a_1 et a_2 :

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{1-a_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ b_2 &= \sqrt{1-a_2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

On calcule alors le membre gauche de l'équation (2) :

$$\begin{aligned} 4a_1b_1(a_1^2 - b_1^2) &= 4 \times \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{4}(2+\sqrt{2}) - \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})\right) \\ &= \sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 1 \\ 4a_2b_2(a_2^2 - b_2^2) &= 4 \times \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{4}(2-\sqrt{2}) - \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})\right) \\ &= \sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}\frac{-\sqrt{2}}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Pour satisfaire l'équation (2) il faut donc choisir la première solution d'où pour finir :

$$\begin{aligned} \cos(\pi/8) &= a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sin(\pi/8) &= b_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{aligned}$$

On peut également trouver ce résultat en considérant l'équation $(e^{i\pi/8})^2 = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$ ce qui donne les deux équations :

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= \sqrt{2}/2 \\ 2ab &= \sqrt{2}/2 \end{aligned}$$

Enfin on aurait pu considérer l'équation $(e^{i\pi/8})^3 = b + ia$ ce qui donne le système :

$$\begin{aligned} a^3 - 3ab^2 &= b \\ 3a^2b - b^3 &= a \end{aligned}$$

Exercice 5 Soit $a = 1 + i$ et $b = 1 + i\sqrt{3}$.

i) Donner les formes polaires de a et b.

Réponse.

$$a = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$
$$b = 2e^{i\pi/3}$$

ii) Donner les formes polaires et cartésiennes de b/a.

Réponse.

$$\frac{b}{a} = \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i(\pi/3-\pi/4)} = \sqrt{2}e^{i\pi/12}$$
$$\frac{b}{a} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2}$$

iii) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Réponse. D'après la question précédente on a :

$$\sqrt{2}e^{i\pi/12} = \frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2}$$

d'où

$$\cos(\pi/12) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$
$$\sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$