GÉOMÉTRIE ET ARITHMÉTIQUE
Planche : Géométrie

1 Vecteurs et points du plan et de l'espace

Exercice 1. On considère les vecteurs :

$$u' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ v' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1. Calculer, lorsque cela a un sens, les combinaisons linéaires suivantes :

$$u' + 3v',\ 2u' - v',\ u' + v' - u,\ 2u + v - w,\ 4w,\ u' + 7w.$$

2. Déterminer si, parmi les vecteurs u, v et w il y en a deux qui sont colinéaires.

3. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de u et v ? Même question pour le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Les vecteurs u' et v' forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$? Même question pour les vecteurs u, v et w de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. On considère les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les deux vecteurs sont colinéaires.
Même question pour les vecteurs $\begin{pmatrix} m \\ m^2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Montrer que l'identité de $\mathbb{R}^n$, pour $n = 2$ et 3, est une translation dont on précisera le vecteur. Montrer que l'identite de $\mathbb{R}^n$ est aussi une homothétie dont on précisera le facteur de dilatation. Montrer ensuite que l'identite est la seule transformation de $\mathbb{R}^n$ qui est une translation et une homothétie à la fois.

Exercice 4. On considère les deux vecteurs du plan $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de u et v.

2. Écrire sous forme de système l'équation vectorielle

$$xu + yv = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

où x et y sont les inconnues et a et b des paramètres réels. En vue du point précédent, que peut on dire du nombre de solutions du système ?

3. Résoudre le système en fonction des paramètres a et b.

4. Reprendre les points précédents pour les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soient $A\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ trois points de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$. Le quadrilatère $OABC$ est-il un parallélogramme ?

Exercice 6.

1. Trouver les coordonnés du milieu de segment AB où $A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. L'origine divise le segment AB dans le rapport $1 : 3$. Trouver le point B si $A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Soient $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ deux sommets d'un triangle et $M\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ le point d'intersection de ses médianes. Trouver le troisième sommet de ce triangle.

Exercice 7.

1. Supposons que les vecteurs u et v forment les diagonales d'un parallélogramme. Exprimer les côtés de ce parallélogramme en fonction de u et v.

2. Montrer que les diagonales d'un parallélogramme s'intersectent au milieu de leurs longueurs.

3. Montrer que les trois médianes d'un triangle se coupent en un point. Montrer de plus que ce point d'intersection est situé sur chaque médiane à $2/3$ de sa longueur en comptant du sommet.

4. Soit L une ligne brisée dans $\mathbb{R}^3$, fermée, composée de 4 segments. Montrer que les milieux de ces 4 segments forment les sommets d'un parallélogramme.

2 Droites et plans

Exercice 8. On considère les points $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que ces trois points sont alignés.

2. Donner une équation paramètrique, puis cartesienne de la droite par ces trois points.

3. On pose $D\begin{pmatrix} -4 \\ m \end{pmatrix}$. Déterminer $m \in \mathbb{R}$ pour que A, B et D soient alignés.

Exercice 9.

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) &= a_1 t + b_1 \\ y = y(t) &= a_2 t + b_2 \end{cases}$.
Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, puis une équation cartésienne.

2. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Donner une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ (on pourra discuter les cas, selon si $\mathcal{D}$ est verticale, horizontale ou oblique). Vérifier que $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Exercice 10. Dans le plan, soient $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de vecteur directeur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}'$ la droite d'équation cartésienne $x+y=1$. Déterminer de façon géométrique (avec un dessin) et algébrique l'intersection de ces deux droites.

Exercice 11. Déterminer une équation paramétrique puis cartésienne de la droite de l'espace passant par les points $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vérifier qu'il ne s'agit pas d'une droite vectorielle (c'est-à-dire, elle ne contient pas O) et donner une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite vectorielle parallèle à la droite par A et B.

Exercice 12. Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne pour chacune des droites suivantes.

1. Droite de $\mathbb{R}^2$ qui passe pas les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Droite de $\mathbb{R}^3$ qui passe pas les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Droite de $\mathbb{R}^2$ qui passe par le point $C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. Droite de $\mathbb{R}^3$ qui passe par le point $C\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. Droite de $\mathbb{R}^3$ étant l'intersection des plans d'équations $6x + 2y - z - 9 = 0$ et $3x + 2y + 2z - 12 = 0$.

Exercice 13. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, trouver les points d'intersection des droites d_1 et d_2 décrites par les équations suivantes :

1. $d_1 : 2x + 5y + 1 = 0$ et $d_2 : x - 2y - 4 = 0$,

2. $d_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$ et $d_2 : 3x - 2y - 4 = 0$,

3. $d_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$.

Exercice 14.

1. Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation cartésienne $x+y+2z+1=0$. Donner une équation paramtŕique de $\mathcal{P}$.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) = & 1+t+s \\ y = y(t) = & t-s \\ z = z(t) = & -1+2t-s \end{cases}$

Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Exercice 15. Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne pour chacun des plans de $\mathbb{R}^3$ suivants.

1. Plan qui passe par le point $B\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et parallèle au plan d'équation $x=0$.

2. Plan qui passe par le point $C\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et contient l'axe Oy.

3. Plan qui passe par l'origine et engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Plan qui passe par les points $P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $R\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. Dans $\mathbb{R}^3$, trouver les points d'intersection des plans p_1 et p_2 donnés par les équations suivantes.

1. $p_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $p_2 : x+y+5z-2=0$.

2. $p_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $p_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Exercice 17. Pour les triplets de points de $\mathbb{R}^3$ suivants déterminer s'ils sont alignés ou pas. En cas affirmatif, donner une équation cartésienne de la droite qui les contient et, en cas négatif, une équation paramétrique du plan qui les contient.

1. $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 18. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de l'espace d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ respectivement. Déterminer en fonction des nombres réels $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ quand l'intersection des deux plans est une droite, vide ou un plan tout entier.

Exercice 19. Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il s'agit d'une droite ou d'un plan en justifiant votre réponse. S'il s'agit d'une droite, en donner deux points distincts, s'il s'agit d'un plan, en donner trois points distincts non alignés.

1. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t) = & -5t+1 \\ y = y(t) = & 2t+3 \end{cases}$$

2. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $2x + 3y + z + 5 = 0$.

3. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t) = & -5t+1 \\ y = y(t) = & 2t+3 \\ z = z(t) = & -t+2 \end{cases}$$

4. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne

$$\begin{cases} 2x + y + 2z - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Exercice 20. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Le point $A \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à la droite d : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

2. La droite d : $\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$ est contenue dans le plan $p : 5y - 3z + 13 = 0$.

3. Le point $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient au plan p : $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4. La droite d : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, est parallèle au plan $p : x + y - z + 3 = 0$.

5. Les points $P \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Q \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ se situent de même côté du plan $p : 2x + 3z - 7 = 0$.

Exercice 21. Montrer que les translations et les homothéties préservent les droites et les plans.

3 Produit scalaire, orthogonalité et norme. Applications

Exercice 22. Calculer les normes $\|u\|$, $\|v\|$, le produit scalaire $u \cdot v$, le cosinus de l'angle entre les vecteurs u et v, ainsi que le projecté orthogonal de u le long de v et de v le long de u.

1. $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, **2.** $u = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ -\sqrt{27} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 23. Vérifier que les repères suivants sont orthonormés, (les vecteurs sont de norme 1 et deux-à-deux orthogonaux).

1. $u = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

2. $u = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 24.
Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

2. En déduire que si, dans un tétraèdre, deux paires d'arêtes opposées sont formées d'arêtes orthogonales, alors il en est de même pour la troisième paire.

3. En déduire aussi qu'un quadrilatère plan dont les côtés opposés sont perpendiculaires a des diagonales perpendiculaires.

4. Dessiner un tel quadrilatère.

Exercice 25. Montrer que $u \cdot v = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$, et $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2)$.

Exercice 26. On considère les trois points $A \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Trouver l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan qui vérifient que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

2. En déduire une équation cartésienne et paramétrique de la droite perpendiculaire à la droite (BC) passant par A.

Exercice 27. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, et $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal au vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

2. Donner une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$ passant par M_0 et orthogonale à $\mathcal{D}$.

3. Donner le point d'intersection entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

4. Montrer que $d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exercice 28. Soit $\mathcal{D}$ la droite dans l'espace, définie par l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x(t) = & 1 + \frac{t\sqrt{6}}{6} \\ y = y(t) = & \frac{t\sqrt{6}}{6} \\ z = z(t) = & \frac{2t\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

Soit (Δ) la droite intersection des deux plans d'équation cartésienne :

$$x + y + z - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad x - y - 2 = 0.$$

Calculer le cosinus de l'angle aigu entre ces deux droites.

Exercice 29. Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne pour chacune des droites suivantes.

1. Droite de $\mathbb{R}^2$ qui passe par le point $P\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et orthogonale à la droite d'équation $3x + 4y + 5 = 0$.

2. Droite de $\mathbb{R}^3$ qui passe par le point $Q\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$ et orthogonale au plan d'équation $3x - y + 2z - 6 = 0$.

Exercice 30. Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne pour chacun des plans de $\mathbb{R}^3$ suivants.

1. Plan qui passe par le point $A\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et orthogonal au vecteur $n = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

2. Plan qui passe par les points $P\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ et $Q\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ et orthogonal au plan d'équation $y = 0$.

3. Plan qui passe par le point $P\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ et orthogonal aux plans d'équations $x + y = 0$ et $y - z = 0$.

Exercice 31. On se donne, dans $\mathbb{R}^3$, le plan $\mathcal{P}$, défini par les points de coordonnées : $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Donner les composantes d'un vecteur orthogonal au plan $\mathcal{P}$, puis une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Exercice 32. (Partiel 2014/2015) Pour tout réel $m \in \mathbb{R}$, on considère le plan P_m de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation cartésienne

$$m^2x + (2m - 1)y + mz = 3.$$

1. Pour quelles valeurs du paramètre m le point $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ appartient-il à P_m ?

2. Pour quelle valeur de m le vecteur $n = \begin{pmatrix}2\\-5/2\\-1\end{pmatrix}$ est-il orthogonal à P_m ?

Exercice 33. Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, et $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ un point de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par M_0 et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
2. Donner le point d'intersection entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.
3. Montrer que $d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
4. En déduire les coordonnées du symétrique de M_0 par rapport au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 34. Montrer que les diagonales d'un losange sont orthogonales.

Exercice 35.
1. Trouver un vecteur w de norme 1, orthogonal aux vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.
2. Trouver un vecteur c de norme 1, qui forme l'angle $\pi/3$ avec les vecteurs $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 36. Calculer l'angle formé par les diagonales des deux faces adjacentes dans un cube.

Exercice 37.
1. Calculer la distance entre le point $A\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et la droite $d : x + 6y + 3 = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer la distance entre le point $B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la droite $l : \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer la distance entre le point $C\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le plan $p : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 38. Calculer la distance entre les plans parallèles d'équations $2x - y + 3z = 0$ et $-4x + 2y - 6z + 8 = 0$.

Exercice 39. Soit $r > 0$ un nombre réel.
1. (*Équation du cercle.*) Donner une équation cartesienne pour l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ à distance r du point $C\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
2. (*Équation de la sphère.*) Donner une équation cartesienne pour l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ à distance r du point $C\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

4 Produit vectoriel, produit mixte

Exercice 40. Calculer les produits vectoriels des vecteurs u et v suivants.

1. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 41. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les composantes des vecteurs : $u \wedge (v \wedge w)$ et $(u \wedge v) \wedge w$.

2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 42. Montrer que $(u \cdot v)^2 - \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \cos 2\alpha$, où α est l'angle entre les vecteurs u et v.

Exercice 43. A, B, C et D étant quatre points quelconques de l'espace, montrer que

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}.$$

Indication : On pourra montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

Exercice 44. Montrer que si (u, v, w) est un repère orthonormé de l'espace alors $(u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u)$ l'est aussi.

Exercice 45. Soient l_1 et l_2 deux droites parallèlles dans $\mathbb{R}^3$. Soit A un point de la droite l_1 et B, C deux points distincts de la droite d_2. En calculant l'aire du triangle ΔABC, justifier que la distance d entre les droites l_1 et l_2 s'exprime par

$$d = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|}.$$

S'en servir pour calculer la distance entre les droites d'équations

$$l_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad l_2 : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 46. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans de l'espace d'équation cartésienne :

$\mathcal{P}_1\ : 2x + y - 1 + 3 = 0$, et

$\mathcal{P}_2\ : -x + z = 0$.

Soit α l'angle aigu entre ces deux plans. On note $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ les vecteurs normaux de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ respectivement. On suppose que $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont de norme 1, et ont leur première coordonnée positive.

1. Déterminer les coordonnées de $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

2. Montrer que α est l'angle aigu entre $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

3. En déduire $\sin(\alpha)$.

Exercice 47. Soit $\mathcal{Q}$ le parallélogramme déterminé par deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'aire de $\mathcal{Q}$ est égale à $|\det(u, v)|$. Supposons maintenant que $u, v \in \mathbb{R}^3$. Montrer alors que l'aire de $\mathcal{Q}$ est égale à $\|u \wedge v\|$.

Exercice 48. Soient les trois points de l'espace $A\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

2. Calculer l'aire de ce parallélogramme.

Exercice 49. Reprendre les exercices 14 et 31 avec la formule du produit vectoriel.

Exercice 50. Soient u, v et w trois vecteurs quelconques de l'espace.

1. Montrer que $u \wedge (v \wedge w) = -(u \cdot v)w + (u \cdot w)v$.

2. (Identité de Jacobi.) Montrer que $u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = \vec{0}$.
Indication : Utiliser la question (1).

Exercice 51. On considère l'espace rapporté à un repère orthonormé. Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur v et soient A et B deux points $\mathcal{D}$. Soit P un point quelconque de l'espace.

1. Montrer que $\overrightarrow{PA} \wedge v = \overrightarrow{PB} \wedge v$.

2. Montrer que la distance d du point P à la droite $\mathcal{D}$ est $d = \dfrac{\|\overrightarrow{PA} \wedge v\|}{\|v\|}$.

Exercice 52. Soient les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$, où $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $\|u \wedge v\|$, puis $\|u\|$ et $\|v\|$.

2. En dd́uire l'ensemble des t tels que l'angle entre u et v soit $\pm\pi/3$.
3. Calculer l'aire du parallélogramme de côtés u et v.

Exercice 53. Calculer les aires des figures suivantes.
1. Parallélogramme engendré par les vecteurs $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
2. Triangle de sommets $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. Parallélépipède engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 54. Soit $p, q \in \mathbb{R}^3$ deux vecteurs. Montrer que l'aire d'un parallélogramme dont p et q sont les diagonales s'exprime par

$$A = \frac{1}{2}\|p \wedge q\|.$$

Exercice 55.
1. Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le volume du tétraèdre de sommets $P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $R \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1 Vecteurs

Exercice 1.

1. Supposons que les vecteurs u et v forment les diagonales d'un parallélogramme. Exprimer les côtés de ce parallélogramme en fonction de u et v.

2. Montrer que les diagonales d'un parallélogramme s'intersectent au milieu de leurs longueurs.

3. Montrer que les trois médianes d'un triangle se coupent en un point. Montrer de plus que ce point d'intersection est situé sur chaque médiane à 2/3 de sa longueur en comptant du sommet.

4. Soit L une ligne brisée dans $\mathbb{R}^3$, fermée, composée de 4 segments. Montrer que les milieux de ces 4 segments forment les sommets d'un parallélogramme.

Exercice 2.

1. Trouver les coordonnés du milieu de segment AB où $A\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\6\\-3\end{pmatrix}$.

2. L'origine divise le segment AB dans le rapport $1:3$. Trouver le point B si $A\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$.

3. Soient $A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}5\\7\\3\end{pmatrix}$ deux sommets d'un triangle et $M\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ le point d'intersection de ses médianes. Trouver le troisième sommet de ce triangle.

2 Scalaire

Exercice 3. Calculer les normes $\|u\|$, $\|v\|$, le produit scalaire $u \cdot v$ ainsi que le cosinus de l'angle entre les vecteurs u et v.

1. $u = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, **2.** $u = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}\sqrt{8}\\-\sqrt{27}\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 4. Montrer que les diagonales d'un losange sont orthogonales.

Exercice 5.

1. Trouver un vecteur w de norme 1, orthogonal aux vecteurs $u = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$.

2. Trouver un vecteur c de norme 1, qui forme l'angle $\pi/3$ avec les vecteurs $a = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 6. Calculer l'angle formé par les diagonales des deux faces adjacentes dans un cube.

3 Vectoriel, mixte

Exercice 7. Calculer les aires des figures suivantes.
1. Parallélogramme engendré par les vecteurs $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
2. Triangle de sommets $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. Parallélépipède engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Soit $p, q \in \mathbb{R}^3$ deux vecteurs. Montrer que l'aire d'un parallélogramme dont p et q sont les diagonales s'exprime par

$$A = \frac{1}{2}\|p \wedge q\|.$$

Exercice 9.
1. Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le volume du tétraèdre de sommets $P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $R \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4 Droite, plan

Exercice 10. Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne pour chacune des droites suivantes.
1. Droite de $\mathbb{R}^2$ qui passe pas les points $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Droite de $\mathbb{R}^3$ qui passe pas les points $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. Droite de $\mathbb{R}^2$ qui passe par le point $C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
4. Droite de $\mathbb{R}^3$ qui passe par le point $C \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
5. Droite de $\mathbb{R}^2$ qui passe par le point $P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et orthogonale à la droite d'équation $3x + 4y + 5 = 0$.
6. Droite de $\mathbb{R}^3$ étant l'intersection des plans d'équations $6x + 2y - z - 9 = 0$ et $3x + 2y + 2z - 12 = 0$.
7. Droite de $\mathbb{R}^3$ qui passe par le point $Q \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et orthogonale au plan d'équation $3x - y + 2z - 6 = 0$.

Exercice 11. Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne pour chacun des plans de $\mathbb{R}^3$ suivants.

1. Plan qui passe par le point $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et orthogonal au vecteur $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Plan qui passe par le point $B \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et parallèle au plan d'équation $x = 0$.

3. Plan qui passe par le point $C \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et contient l'axe Oy.

4. Plan qui passe par l'origine et parallèle aux vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Plan qui passe par les points $P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $R \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. Plan qui passe par les points $P \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $Q \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et orthogonal au plan d'équation $y = 0$.

7. Plan qui passe par le point $P \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et orthogonal aux plans d'équations $x + y = 0$ et $y - z = 0$.

Exercice 12. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, trouver les points d'intersection des droites d_1 et d_2 décrites par les équations suivantes :

1. $d_1 : 2x + 5y + 1 = 0$ et $d_2 : x - 2y - 4 = 0$,

2. $d_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$ et $d_2 : 3x - 2y - 4 = 0$,

3. $d_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^3$, trouver les points d'intersection des plans p_1 et p_2 donnés par les équations suivantes.

1. $p_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $p_2 : x + y + 5z - 2 = 0$.

2. $p_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $p_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Exercice 14. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Le point $A \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à la droite $d : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

2. La droite $d : \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$ est contenue dans le plan $p : 5y - 3z + 13 = 0$.

3. Le point $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient au plan $p : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4. La droite $d : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, est parallèle au plan $p : x + y - z + 3 = 0$.

5. Les points $P \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Q \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ se situent de même côté du plan $p : 2x + 3z - 7 = 0$.

Exercice 15. (Partiel 2014/2015) Pour tout réel $m \in \mathbb{R}$, on considère le plan P_m de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation cartésienne

$$m^2x + (2m-1)y + mz = 3.$$

1. Pour quelles valeurs du paramètre m le point $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient-il à P_m ?

2. Pour quelle valeur de m le vecteur $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -5/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est-il orthogonal à P_m ?

5 Distance

Exercice 16.
1. Calculer la distance entre le point $A \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et la droite $d : x + 6y + 3 = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer la distance entre le point $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la droite $l : \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}^3$.

3. Calculer la distance entre le point $C \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le plan $p : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 17. Soient l_1 et l_2 deux droites parallèlles dans $\mathbb{R}^3$. Soit A un point de la droite l_1 et B, C deux points distincts de la droite d_2. En calculant l'aire du triangle ΔABC, justifier que la distance d entre les droites l_1 et l_2 s'exprime par

$$d = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|}.$$

S'en servir pour calculer la distance entre les droites d'équations

$$l_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad l_2 : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 18. Calculer la distance entre les plans parallèles d'équations $2x - y + 3z = 0$ et $-4x + 2y - 6z + 8 = 0$.