Université de Provence 2009-2010
Licence MI 1ère année-S1

Mathématiques générales I

Géométrie euclidienne

Table des matières

1 Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ 1
1.1 Opérations sur les vecteurs . . . 1
1.2 Représentation géométrique . . . 2
1.3 Produit scalaire . . . 2
1.4 Norme et produit scalaire . . . 2
1.5 Angle entre deux vecteurs . . . 3
1.6 Aire d'un parallélogramme ou d'un triangle . . . 4

2 Equation d'une droite dans le plan 5
2.1 Equation cartésienne . . . 5
2.2 Equation paramétrique . . . 6

3 Equation d'un plan 7
3.1 Equation cartésienne . . . 7
3.2 Equation paramétrique . . . 8

4 Equation d'une droite dans l'espace 9
4.1 Equation cartésienne . . . 9
4.2 Equation paramétrique . . . 9

5 Equation d'un cercle dans $\mathbb{R}^2$ 10
5.1 Equation cartésienne . . . 10
5.2 Equation paramétrique . . . 10

6 Equations polaires 11

7 Produit vectoriel 12
7.1 Définitions . . . 12
7.2 Interprétations géométriques . . . 14
7.3 Parallélogramme, triangle et parallélépipède . . . 15

1 Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

1.1 Opérations sur les vecteurs

Dans ce paragraphe on considérera les *vecteurs* de $\mathbb{R}^2$ comme des couples de réels $\vec{u} = (x, y)$ et ceux de $\mathbb{R}^3$ comme des triplets de réels $\vec{u} = (x, y, z)$.

La *somme* de deux vecteurs est définie par :
- $\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$ (si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ appartiennent à $\mathbb{R}^2$).
- $\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y', z + z')$ (si $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ appartiennent à $\mathbb{R}^3$).

Le *produit* d'un vecteur *par un réel* est défini par
- $\lambda\vec{u} = (\lambda x, \lambda y)$ (si $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$).
- $\lambda\vec{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ (si $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$).

1.2 Représentation géométrique

Par commodité, nous nous placerons dans le plan, mais c'est la même manière de procéder dans l'espace.

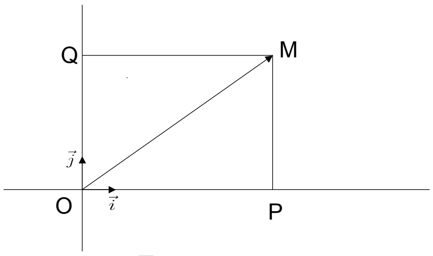

FIGURE 1

Les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (voir la Figure 1) ont pour longueur 1. On associe à tout couple de réels (x, y) le point M d'abscisse x (= longueur de OP) et d'ordonnée y (= longueur de OQ), ainsi que le vecteur $\overrightarrow{OM}$, qu'on identifiera au couple (x, y). D'après le théorème de Pythagore, sa longueur (notée OM) est

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Si M est un point de coordonnées (x, y), on note $M(x, y)$.
Si $\vec{u} = (x, y)$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ où M a pour coordonnées (x, y). Par commodité, on dit que $\vec{u}$ a pour coordonnées (x, y) et on écrit $\vec{u}(x, y)$.
Notons qu'avec la définition ci-dessus de la somme de deux vecteurs, on retrouve *la relation de Chasles* : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, pour tout triplet de points A, B, C du plan ou de l'espace.

1.3 Produit scalaire

Le *produit scalaire* de deux vecteurs est un nombre réel défini par

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ (si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ appartiennent à $\mathbb{R}^2$).
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ (si $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ appartiennent à $\mathbb{R}^3$).

Notons que l'on a immédiatement : $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0$ dans $\mathbb{R}^2$, et de même avec les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de $\mathbb{R}^3$.

Les propriétés suivantes sont souvent utilisées implicitement dans les calculs.

Propriétés 1.1 *Le produit scalaire est symétrique, c'est à dire :* $\forall \vec{u}, \vec{v}, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
Il est linéaire par rapport aux deux variables, c'est à dire :

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{l} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}). \end{array}$$

1.4 Norme et produit scalaire

La *norme* d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ est définie par $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Théorème 1.2 *La norme de* $\vec{u}$ *vaut* $\|\vec{u}\| = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{si } \vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2. \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$

Notons que l'on a bien : $OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et que $\|\vec{i}\| = |\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Corollaire 1.3 *Pour tout* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *ou dans* $\mathbb{R}^3$*, on a les propriétés suivantes.*

(i) $\|\vec{u}\| \geq 0$.
(ii) $\|\vec{u}\| = 0$ *si et seulement si* $\vec{u}$ *est le vecteur nul.*
(iii) $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \; \|\vec{u}\|$ *(pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*).*
(iv) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ *(inégalité triangulaire)*

Théorème 1.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$ on a :*

$$\boxed{|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \| \vec{u}\| \ . \ \|\vec{v}\|}$$

1.5 Angle entre deux vecteurs

Soit θ *un angle (non-orienté)* entre deux vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$) représentés par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sur la Figure 2.

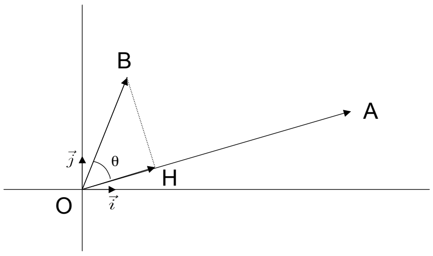

Figure 2

Supposons que $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ soient deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Soient z et z' les complexes qui sont les affixes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement.
Posons $z = re^{i\alpha}$ et $z' = se^{i\beta}$, où r, s sont les modules de z et z' respectivement, et α, β sont les arguments de z et z' respectivement.
On rappelle que :

- $r = \|\vec{u}\|$ et $s = \|\vec{v}\|$;
- $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ et $z' = s(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$.

L'angle θ s'écrit $\theta = \pm(\alpha - \beta)$; $\pm$ car il est non-orienté.
Alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = rs\big(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\big) = rs\cos(\pm(\alpha - \beta)) = rs\cos(\theta)$. Donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \| \vec{v}\| \ \cos\theta$.
On définit ainsi θ comme le réel dans $[0, \pi]$ tel que

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\|}. \tag{1}$$

On en déduit facilement le théorème suivant.

Théorème 1.5 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls dans $\mathbb{R}^2$, et $\theta \in [0, \pi]$ l'angle non orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les propriétés suivantes sont toutes vérifiées.*

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot\| \vec{v}\| \ \cos\theta.$
- $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0$ *ou* $\pi \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires.*
- $\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = 0.$

Un couple (resp. un triplet) de vecteurs non-nuls de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$) est appelé *repère orthonormé* si les vecteurs sont tous de norme 1, et si tous leurs produits scalaires sont nuls.

En développant la relation de Chasles, et en utilisant les propriétés ci-dessus du produit scalaire, on montre le résultat suivant. On rappelle que la formule du produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ est $xx' + yy'$.

Lemme 1.6 *La formule du produit scalaire ne dépend pas du repère orthonormé choisi dans $\mathbb{R}^2$.*

Supposons maintenant que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs dans l'espace. Ils définissent un plan. Par le théorème précédent, on obtient

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot\| \vec{v}\| \ \cos(\theta)}$$

Par conséquent :

Proposition 1.1 *La formule* (1)*, le Théorème 1.5 et le Lemme 1.6 sont aussi satisfaits dans l'espace.*

Notons que l'on retrouve bien que le *cosinus* d'un angle dans un triangle rectangle, est le le quotient de la longueur du côté adjacent par celle de l'hypothénuse (voir la figure 2 ci-dessous). Le *projeté orthogonal* de B sur OA est le point H de la droite OA tel que $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{OA}$ (voir section 2.1).

Lemme 1.7 *Soit H le projeté orthogonal de B sur OA, alors*

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{OH}{OB}}$$

Preuve. Avec la relation de Chasles, et la distributivité du produit scalaire, on obtient :
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB}$, car le produit scalaire est distributif. Donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ car $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{OA}$.

Comme $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = OA.OH$. Or $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA.OB\cos(\theta)$, où θ est l'angle entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Donc, on a bien : $OA.OB\cos(\theta) = OA.OH$, cad $\cos(\theta) = \dfrac{OH}{OB}$. □

Remarque : Si le triangle est rectangle en O, alors $H = O$, $\theta = \pi/2$ et $OH = 0$ d'où $\cos(\pi/2) = 0$. Si le triangle est rectangle en A, alors $H = A$ et $OH = OA$ d'où $\cos(\theta) = OA/OB$.

1.6 Aire d'un parallélogramme ou d'un triangle

Soit $OABC$ le parallélogramme ci-dessous :

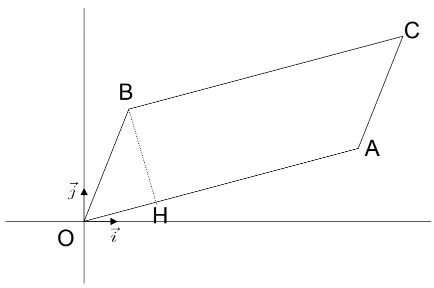

FIGURE 3

L'aire de $OABC$ est $OA.BH$, où H est le point du segment $[OA]$ tel que $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{OA}$ (voir la Figure 3) :

$$\boxed{OA.BH = \text{L'aire du parallélogramme } OABC}$$

et

$$\boxed{\frac{1}{2}\, OA.BH = \text{L'aire du triangle } OAB.}$$

EXERCICE 1

Vérifier que les repères suivants sont orthonormés, cad que les vecteurs sont de norme 1, et qu'ils sont deux-à-deux orthogonaux.

1. $\overrightarrow{U}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\overrightarrow{V}(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

2. $\overrightarrow{U}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $\overrightarrow{V}(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $\overrightarrow{W}(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$.

Exercice 2

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.
1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
2. En déduire que si, dans un tétraèdre, deux paires d'arêtes opposées sont formées d'arêtes orthogonales, alors il en est de même pour la troisième paire.
3. En déduire aussi qu'un quadrilatère plan dont les côtés opposés sont perpendiculaires a des diagonales perpendiculaires.
4. Dessiner un tel quadrilatère.

Exercice 3

Soient $A(4,0), B(2,3)$ et $C(6,3)$ trois points de $\mathbb{R}^2$. Vérifier que $OABC$ est un parallélogramme, puis calculer son aire.

Exercice 4

Montrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$ et $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$.

2 Equation d'une droite dans le plan

2.1 Equation cartésienne

On appelle *équation cartésienne d'une droite* $\mathcal{D}$ (non parallèle à l'axe des ordonnées) une équation de la forme

$$y = ax + b \tag{2}$$

C'est à dire $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y = ax + b$, i.e. $\mathcal{D} = \{(x, ax+b), x \in \mathbb{R}\}$. Plus généralement l'équation cartésienne de toute droite peut être donnée sous la forme

$$ax + by + c = 0, \text{ où } (a,b) \neq (0,0) \tag{3}$$

Quand $b = 0$, la droite est *verticale* (parallèle à l'axe des ordonnées) d'équation cartésienne $x = C$, où C est une constante. La droite est l'ensemble des points $M(C,y)$ où $y \in \mathbb{R}$: $\mathcal{D} = \{(C,y), y \in \mathbb{R}\}$.
Soit $\mathcal{D}$ une droite. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{v}(a,b)$ un vecteur orthogonal à D. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}.\vec{v} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad ax + by + c = 0 \quad (\text{avec } c = -ax_0 - by_0), \end{aligned}$$

ce qu'on peut représenter par la figure 4 ci-dessous.

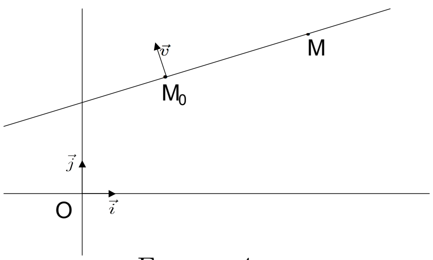

Figure 4

Ainsi, si une droite $\mathcal{D}$ admet

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

comme équation cartésienne, alors

$$\boxed{\vec{v}(a,b) \text{ est un vecteur orthogonal à } \mathcal{D}.}$$

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$. On appelle *distance de M_0 à $\mathcal{D}$*, notée $d(M_0, \mathcal{D})$, la distance M_0H où H est le point de $\mathcal{D}$ tel que le vecteur $\overrightarrow{M_0H}$ soit orthogonal à la droite $\mathcal{D}$. On dit aussi que H est *le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$*. On appelle *symétrique de M par rapport à $\mathcal{D}$*, le point M' tel que H soit le milieu du segment $[MM']$.

Lemme 2.1 *Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, et $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$. Alors*

$$\boxed{d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.}$$

La preuve est laissée en exercice.

Exercice 5

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, et $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\vec{v}(-b, a)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
2. Donner une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$ passant par M_0 et orthogonale à $\mathcal{D}$.
3. Donner le point d'intersection entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
4. Montrer que $d(M_0, \mathcal{D}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2.2 Equation paramétrique

On appelle *équation paramétrique de $\mathcal{D}$* une équation où les coordonnées des points de $\mathcal{D}$ dépendent *d'un paramètre*, noté t, de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x = x(t) & = & a_1 t + b_1 \\ y = y(t) & = & a_2 t + b_2 \end{array} \right. \tag{4}$$

c'est à dire un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que $x = a_1 t + b_1$ et $y = a_2 t + b_2$. Cette dernière équation peut se mettre sous forme vectorielle :

$$(x, y) = t(a_1, a_2) + (b_1, b_2)$$

ou, en appellant M le point de coordonnées (x, y), M_0 le point de coordonnées (b_1, b_2), et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées (a_1, a_2),

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\vec{u}$$

ce qu'on peut représenter par la figure suivante :

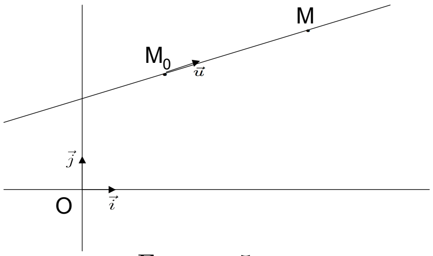

FIGURE 5

On dit alors que $\mathcal{D}$ est *la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ qui passe par le point M_0.*

EXERCICE 6

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) & = & a_1 t + b_1 \\ y = y(t) & = & a_2 t + b_2 \end{cases}$.
Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.
2. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Donner une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ (discuter les cas, selon si $\mathcal{D}$ est verticale, horizontale ou oblique).

3 Equation d'un plan

3.1 Equation cartésienne

L'équation cartésienne d'un plan dans l'espace est de la forme

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{5}$$

C'est à dire $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, i.e.

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}, ax + by + cz + d = 0\}.$$

Lemme 3.1 *Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point du plan $\mathcal{P}$, défini par l'équation cartésienne* (5). *Alors $M(x, y, z) \in \mathcal{P}$ si et seulement si $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.*

Preuve. Comme M_0 est dans $\mathcal{P}$, on a $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. Donc $M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 = ax_0 + by_0 + cz_0 + d \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. □

Lemme 3.2 *Soit $\mathcal{P}$, le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. Alors*

$$\boxed{\vec{n}(a, b, c) \text{ est un vecteur orthogonal à } \mathcal{P}}$$

cad pour tout couple de points distincts A et B de $\mathcal{P}$, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$.

Preuve. Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points distincts de $\mathcal{P}$. Par le lemme précédent, $a(x_A - x_B) + b(y_A - y_B) + c(z_A - z_B) = 0$. Or $\vec{n}.\overrightarrow{BA} = a(x_A - x_B) + b(y_A - y_B) + c(z_A - z_B) = 0$. □

On dit que $\vec{n}$ est *un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$*. La réciproque du lemme précédent est vraie, cad :

Lemme 3.3 *Si $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$, alors une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où $d \in \mathbb{R}$.*

Preuve. En effet, en reprenant la preuve du lemme précédent, on a $\vec{n}.\overrightarrow{MM_0} = a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$, où $M(x,y,z)$ et $M_0(x_0,y_0,z_0)$ sont deux points distincts de $\mathcal{P}$. On obtient le résultat par le Lemme 3.1. □

Soit $\mathcal{P}$ un plan et $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$. On appelle *distance de* M_0 *à* $\mathcal{P}$, notée $d(M_0,\mathcal{P})$, la distance M_0H où H est le point de $\mathcal{P}$ tel que le vecteur $\overrightarrow{M_0H}$ soit orthogonal au plan $\mathcal{P}$. On dit aussi que H *est le projeté orthogonal de* M *sur* $\mathcal{P}$. On appelle *symétrique de* M *par rapport à* $\mathcal{P}$, le point M' tel que H soit le milieu du segment $[MM']$.

Lemme 3.4 *Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, et $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$. Alors*

$$\boxed{d(M_0,\mathcal{D}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.}$$

La preuve est laissée en exercice (cf. Exercice 10).

Exercice 7

Soit $\mathcal{D}$ la droite dans l'espace, définie par l'équation paramétrique :

$x = 1+\frac{t\sqrt{6}}{6}$, $\quad y = \frac{t\sqrt{6}}{6}$ $\quad$ et $\quad z = \frac{2t\sqrt{6}}{6}$

Soit la droite (Δ), intersection des deux plans d'équation :

$x+y+z=1$ $\quad$ et $\quad x-y=2$.

Calculer le cosinus de l'angle aigu entre ces deux droites.

Exercice 8

On se donne, dans $\mathbb{R}^3$, le plan $\mathcal{P}$, défini par les points de coordonnées : $A=(1,1,1)$, $B=(0,2,0)$ et $C=(0,-1,1)$. Donner les composantes d'un vecteur orthogonal au plan $\mathcal{P}$, puis une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

3.2 Equation paramétrique

L'équation paramétrique d'un plan $\mathcal{P}$ est une équation où les coordonnées des points de $\mathcal{P}$ dépendent *de deux paramètre*, notés s et t, de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x=x(s,t) & = & a_1s+b_1t+c_1 \\ y=y(s,t) & = & a_2s+b_2t+c_2 \\ z=z(s,t) & = & a_3s+b_3t+c_3 \end{array}\right. \tag{6}$$

c'est à dire un point $M(x,y,z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe deux réels s et t qui vérifient les trois égalités, de l'équation (6).

En appellant M le point de coordonnées (x,y,z), M_0 le point de coordonnées (c_1,c_2,c_3), $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées (a_1,a_2,a_3) et $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées (b_1,b_2,b_3), on a :

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + s\vec{u} + t\vec{v}$$

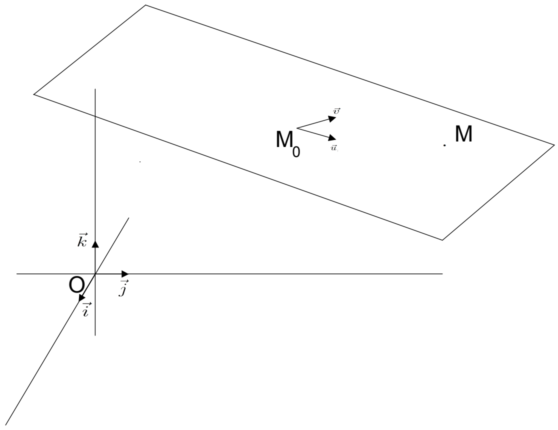

FIGURE 6

Les trois vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $s\vec{u}+t\vec{v}$, pour tous les réels s et t, sont *parallèles au plan*, c'est-à-dire : $\forall s \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$, si $\vec{w} = s\vec{u}+t\vec{v}$, alors il existe deux points A et B de $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{w}$.

EXERCICE 9

1. Donner une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ défini par l'équation cartésienne $x+y+2z+1=0$.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) = & 1+t+s \\ y = y(t) = & t-s \\ z = z(t) = & -1+2t-s \end{cases}$

Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

4 Equation d'une droite dans l'espace

4.1 Equation cartésienne

L'équation cartésienne d'une droite dans l'espace, est donnée sous la forme de deux équations :

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Un point $M(x,y,z)$ appartient à la droite si et seulement si il vérifie les deux équations, c'est à dire si et seulement si il appartient à l'intersection des plans définis par ces deux équations.

4.2 Equation paramétrique

L'équation paramétrique d'une droite dans l'espace est de la forme :

$$\begin{cases} x = x(t) = & a_1t+b_1 \\ y = y(t) = & a_2t+b_2 \\ z = z(t) = & a_3t+b_3. \end{cases} \tag{8}$$

En appellant M le point de coordonnées (x,y,z), M_0 le point de coordonnées (b_1,b_2,b_3), et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées (a_1,a_2,a_3), cette équation équivaut à

$$M \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\vec{u}.$$

EXERCICE 10

Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, et $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par M_0 et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

2. Donner le point d'intersection entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

3. Montrer que $d(M_0,\mathcal{D}) = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

4. En déduire les coordonnées du symétrique de M_0 par rapport au plan $\mathcal{P}$.

5 Equation d'un cercle dans $\mathbb{R}^2$

On appelle *cercle de centre* $A(x_A, y_A)$ *et de rayon* $r \geq 0$ l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $AM = r$. Notons que si $r = 0$ alors le cercle est réduit au point A : $\mathcal{C} = \{A\}$.

5.1 Equation cartésienne

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon $r \geq 0$. On a :

$$\mathcal{C} = \{M, AM = r\} = \{(x, y), (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2\}.$$

On a $M(x, y) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $x^2 + y^2 - 2xx_A - 2yy_A = r^2 - (x_A^2 + y_A^2)$ si et seulement si :

$$x^2 + y^2 - 2xx_A - 2yy_A - \left(r^2 - (x_A^2 + y_A^2)\right) = 0. \tag{9}$$

Cette équation est appelée *équation cartésienne de* $\mathcal{C}$. Ainsi une équation cartésienne d'un cercle est de la forme

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$

où a, b, c sont des constantes réelles. Quelles conditions a-t-on sur a, b et c pour que $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ soit l'équation d'un cercle ?

On a :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + ax + by + c &= (x^2 + ax) && +(y^2 + by) && +c \\ &= (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} && +(y + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} && +c \\ &= (x + \frac{a}{2})^2 && +(y + \frac{b}{2})^2 && +c - (\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}) \end{aligned}$$

Donc $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = (\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}) - c$.

Posons alors $A(-a/2; -b/2)$ et $R = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$.

On obtient $M(x, y)$ satisfait $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ si et seulement si $AM^2 = R$.

• Si $R < 0$ il n'y a pas de solution : aucun (x, y) ne vérifie l'équation.

• Si $R = 0$ alors seul A vérifie l'équation (cercle de rayon nul).

• Si $R > 0$ alors l'ensemble des solutions est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{R}$.

5.2 Equation paramétrique

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre l'origine $O(0, 0)$ et de rayon $r \geq 0$. Alors $M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$.

Son *équation paramétrique* est : $\begin{cases} x = x(t) = & \cos(t) \\ y = y(t) = & \sin(t) \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ est le paramètre.

Considérons maintenant un cercle de centre $I(x_I, y_I)$ et de rayon R (faire une figure). Alors $M(x, y) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\cos(t) = \frac{x - x_I}{R}$ et $\sin(t) = \frac{y - y_I}{R}$. De la même manière, son *équation paramétrique*, de paramètre $t \in \mathbb{R}$, est :

$$\begin{cases} x = x(t) = & x_I & +R\cos(t) \\ y = y(t) = & y_I & +R\sin(t) \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est l'angle entre } \vec{i} \text{ et } \overrightarrow{IM}. \tag{10}$$

Soit maintenant un cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(R, 0)$ et de rayon R. Alors $\mathcal{C}$ passe par l'origine car $OI = R$ (faire une figure). Alors $M(x, y) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $(x - R) + y^2 = R^2$, cad

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0.$$

Posons $y = tx$, où $t \in \mathbb{R}$. On obtient $x^2(1+t^2) - 2Rx = 0 \Leftrightarrow x\big(x(1+t^2) - 2R\big) = 0$.
Si $x = 0$ alors $M = O$ et $y = 0$.
Sinon, on suppose $x \neq 0$. Cela donne l'équation paramétrique (dite *rationnelle*) de $\mathcal{C}$:

$$(11) \qquad \begin{cases} x = x(t) = & \dfrac{2R}{1+t^2} \\[2ex] y = y(t) = & \dfrac{2Rt}{1+t^2} \end{cases}$$

Notons que quand t tend vers $\pm\infty$ le point $M(x,y) = M(t)\big(x(t), y(t)\big)$ tend vers l'origine $O(0,0)$.

EXERCICE 11

Ecrire les équations cartésienne et paramétrique du cercle de centre $I(1,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$ (dans le plan).

6 Equations polaires

On note z_M l'affixe (complexe) du point $M(x,y)$, et on note $M(z_M)$. Alors $z_M = x + iy = \rho e^{i\theta}$, où $\rho = |z_M| = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\theta = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$.
On note alors $M(\rho,\theta)$, cela signifie que $z_M = \rho e^{i\theta}$.
Une équation est dite *polaire* si elle est exprimée en fonction de r et θ (et non plus en fonction de x et y).
Voici quelques exemples d'équations polaires simples.

L'équation polaire d'un cercle $\mathcal{C}$ centré en l'origine et de rayon R est $\rho = R$, i.e. $\mathcal{C} = \{(R,\theta), \theta \in [0, 2\pi[\}$.

L'équation polaire d'une droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine et faisant un angle α avec l'axe des abscisses est :

$$\theta = \begin{cases} & \alpha \\ \text{ou} & \\ & \alpha + \pi \end{cases} \qquad \text{i.e. } \mathcal{D} = \{(R,\alpha), R \geq 0\} \cup \{\, (R, \alpha+\pi), R \geq 0\}.$$

EXERCICE 12

Montrer que l'équation polaire d'un cercle passant par $(0,0)$ est de la forme : $\rho = 0$ ou $\rho = a\cos\theta + b\sin\theta$, où a et b sont deux nombres réels.

EXERCICE 13

Soit a un nombre réel fixé. Montrer que l'équation polaire de la droite verticale passant par $(a,0)$ est de la forme : $\rho = \dfrac{a}{\cos\theta}$.

EXERCICE 14

Soit f la rotation de centre $I(-2,0)$ et d'angle $\pi/3$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(0,2)$ et de rayon 4. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $B(-1,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,1)$.
1. Donner l'expression de f.
2. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{C}$.
3. Quelles sont les images de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ par f ? En passant par l'expression complexe de la rotation, vérifier que l'image d'un cercle est un cercle de même rayon, et que l'image d'une droite $\mathcal{D}$ est une droite $\mathcal{D}'$. Vérifier que l'angle entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est l'angle de la rotation.
4. Soit h une homothétie de rapport r. En passant par l'expression complexe, vérifier que l'image d'un cercle de rayon R est un cercle de rayon rR, et que l'image d'une droite est une droite parallèle.
5. En déduire l'image d'un cercle et d'une droite par une similitude (par composition).
6. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.
7. Soit g la similitude de centre A, de rapport 2 et d'angle $\pi/6$.
7.1. Donner l'expression de g.
7.2. Quelles sont les images de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ par g ?

7 Produit vectoriel

7.1 Définitions

Soient $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$.
On appelle *déterminant* de $\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$, et on note $\det \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$, le nombre réel :

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = xy' - x'y.}$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ de $\mathbb{R}^3$ est le vecteur :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x'', y'', z'') \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x'' = +\det \begin{pmatrix} y & y' \\ z & z' \end{pmatrix} = yz' - zy' \\[2ex] y'' = -\det \begin{pmatrix} x & x' \\ z & z' \end{pmatrix} = zx' - xz' \\[2ex] z'' = +\det \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = xy' - yx'. \end{cases} \tag{12}$$

En pratique : pour se rappeler plus simplement cette formule du produit vectoriel, d'abord on écrit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en vecteurs colonnes

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Puis on écrit *la matrice*

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{pmatrix}$$

Enfin, pour retrouver les formules des coordonnées (X, Y, Z) du vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, on applique

- X =1re coordonnée= det de ($\mathcal{M}-$ la 1re ligne)
- Y =2nde coordonnée= $-$ det de ($\mathcal{M}-$ la 2nde ligne)
- X =3eme coordonnée= det de ($\mathcal{M}-$ la 3eme ligne)

Attention :
1. Se rappeler que la formule **alterne**, cad $X = +\det\dots$ puis $Y = -\det\dots$ puis $Z = +\det\dots$.
2. Ne pas échanger l'ordre de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{M}$, car $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$, et donc ce n'est pas égal.

Exercice 15

Calculer les produits vectoriels suivants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
1. $\vec{u}(1, 2, 3)$ et $\vec{v}(2, 0, 4)$.
2. $\vec{u}(-1, 4, 2)$ et $\vec{v}(1, 1, 1)$.
3. $\vec{u}(0, 2, 0)$ et $\vec{v}(3, 0, 1)$.

Exercice 16

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{U}(1, -1, 0)$, $\overrightarrow{V}(0, 1, -1)$ et $\overrightarrow{W}(-1, 0, -1)$.
1. Calculer les composantes des vecteurs : $\overrightarrow{U} \wedge (\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W})$ et $(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}) \wedge \overrightarrow{W}$.
2. Que peut-on en déduire ?

De la formule du produit vectoriel (cf. (12)) on en déduit les propriétés ci-dessous en développant les calculs.

Propriétés 7.1 *Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On a toutes les propriétés suivantes.*

$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} \qquad \textit{antisymétrie}$$

$$\begin{cases} \vec{u} \wedge (a\vec{v} + b\vec{w}) = a(\vec{u} \wedge \vec{v}) + b(\vec{u} \wedge \vec{w}) \\ (a\vec{u} + b\vec{v}) \wedge \vec{w} = a(\vec{u} \wedge \vec{w}) + b(\vec{v} \wedge \vec{w}) \end{cases} \qquad \textit{bilinéarité}$$

Remarque.
On peut prendre comme définition du produit vectoriel la suivante. Le produit vectoriel est une *forme* (application) bilinéaire et antisymétrique, qui vérifie

$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{cases}$$

(cad qui vérifie exactement les propriétés citées ci-dessus). Alors, cela implique que le produit vectoriel s'exprimera exactement par les formules (12). En effet, il s'agit simplement de développer les calculs, en exprimant les vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ par rapport aux trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$: $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Proposition 7.1 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls de $\mathbb{R}^3$. Alors*

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \text{ si et seulement si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

En particulier $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

Preuve. Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = a\vec{u}$. Comme le produit vectoriel est bilinéaire on a $\vec{u} \wedge (a\vec{u}) = a(\vec{u} \wedge \vec{u})$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
Comme il est aussi antisymétrique (en posant $\vec{v} = \vec{u}$) on obtient $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{u}$. Donc $2(\vec{u} \wedge \vec{u}) = \vec{0}$, d'où $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

Réciproquement, si $\vec{u}(x, y, z) \wedge \vec{v}(x', y', z') = \vec{0}$ alors $\begin{cases} yz' - zy' = 0 \\ zx' - xz' = 0 \\ xy' - yx' = 0. \end{cases}$

En résolvant ces trois équations, on obtient qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(x', y', z') = a(x, y, z)$. Comme $\vec{u}$ est non-nul, l'une de ses coordonnées est non-nulle, elle donnera a. Par exemple, supposons que $y \neq 0$, alors la troisième équation donne $x' = \dfrac{x}{y}x$. On pose $a = x/y$. □

EXERCICE 17

A, B, C et D étant 4 points quelconques de l'espace, montrer que

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}.$$

Indication : On pourra montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

EXERCICE 18

Montrer que si $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ est un repère orthonormé de l'espace alors $(\vec{U} \wedge \vec{V}, \vec{V} \wedge \vec{W}, \vec{W} \wedge \vec{U})$ l'est aussi.

7.2 Interprétations géométriques

Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un autre vecteur $\vec{w}$. On voudrait connaître sa norme et sa direction de manière "simple". Nous allons voir que sa norme s'exprime en fonction de celles de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de l'angle entre ces vecteur ; quant à sa direction, elle est perpendiculaire au plan défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

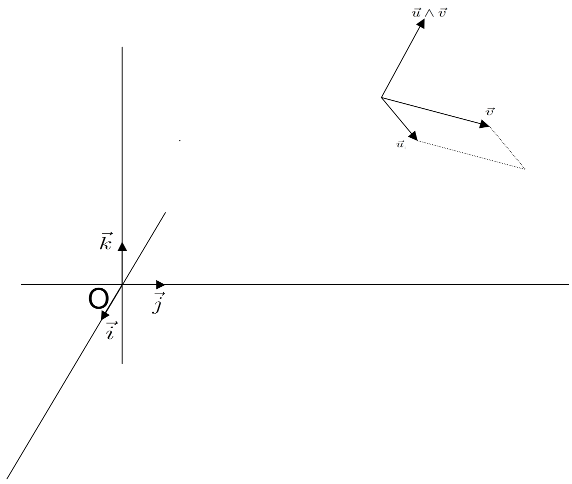

Figure 7

Théorème 7.2 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls de $\mathbb{R}^3$.*

$$\boxed{\textit{Le produit vectoriel } \vec{u} \wedge \vec{v} \textit{ est un vecteur orthogonal à } \vec{u} \textit{ et à } \vec{v}.}$$

Preuve. Il suffit de vérifier par les calculs que $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{u} = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{v} = 0$. □

Théorème 7.3 (Identité de Lagrange) *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls de $\mathbb{R}^3$. Alors*

$$\boxed{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \ . \ \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2}$$

Preuve. Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$. L'expression analytique de cette relation est : $(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2$. En développant les calculs, elle est immédiatement vérifiée. □

Théorème 7.4 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls de $\mathbb{R}^3$. Alors*

$$\boxed{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.|\sin(\theta)|}$$

où $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Preuve. Par l'identité de Lagrange et la formule du $|\vec{u}.\vec{v}|$ en fonction de $\cos(\theta)$, on en déduit l'égalité. En effet :
$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2.\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$, par l'identité de Lagrange, donc
$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2.\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2.\|\vec{v}\|^2 \cos^2(\theta)$. D'où
$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2.\|\vec{v}\|^2(1 - \cos^2(\theta)) = \|\vec{u}\|^2.\|\vec{v}\|^2 \sin^2(\theta)$. □

En pratique, on considère θ l'angle entre les droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, qui est plus petit ou égal à $\pi/2$ (appelé *angle aigu*). Ainsi $\sin(\theta) \geq 0$, et on peut enlever les valeurs absolues.

Exercice 19

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans de l'espace d'équation cartésienne :

$\mathcal{P}_1$: $2x + y - z + 3 = 0$, et

$\mathcal{P}_2$: $-x + z = 0$.

Soit α l'angle aigu entre ces deux plans. On note $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ les vecteurs normaux de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ respectivement. On suppose que $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont de norme 1, et ont leur première coordonnée positive.

1. Déterminer les coordonnées de $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

2. Montrer que α est l'angle aigu entre $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

3. En déduire $\sin(\alpha)$.

7.3 Parallélogramme, triangle et parallélépipède

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls et non-colinéaires de $\mathbb{R}^3$. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent un parallélogramme $OABC$ (voir Figure 3) où A, B, C sont les points de l'espace tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

Réciproquement, si $\mathcal{Q}$ est un parallélogramme (non-plat), alors il existe $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls et non-colinéaires de $\mathbb{R}^3$ qui définissent $\mathcal{Q}$.

Théorème 7.5 *Soient $\mathcal{Q}$ un parallélogramme (non-plat), et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls et non-colinéaires de $\mathbb{R}^3$ qui définissent $\mathcal{Q}$. Alors $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ =Aire de $\mathcal{Q}$.*

Preuve. On a déjà vu que $OA.BH$ =L'aire du parallélogramme $OABC$, où H est le point du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{OA}$. Or $BH = \|\overrightarrow{OB}\|.|\sin(\theta)|$. Donc l'aire de $\mathcal{Q}$ est $OA.OB.|\sin(\theta)| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$. □

Comme l'aire de $OABC = 2$ fois l'aire du triangle OAB, on obtient immédiatement :

Corollaire 7.6 *Soient $\mathcal{T}$ un triangle (non-plat) de sommets A, B, C, alors*

$$\boxed{\frac{1}{2}\ \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \textit{Aire de } \mathcal{T}.}$$

De la même manière on obtient le volume d'un parallélépipède.

Théorème 7.7 *Soient $\mathcal{P}$, un parallélépipède (non-plat) de sommets $A, B, C, D, A', B', C', D'$, où $ABCD$ est un parallélogramme qui est la surface de base de $\mathcal{P}$, et il existe une arête de $\mathcal{P}$ qui joint A et A'. Le volume $\mathcal{V}$ de $\mathcal{P}$ est donné par*

$$\boxed{\mathcal{V} = |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\ .\ \overrightarrow{AA'}|}$$

Preuve. Soient $\mathcal{A}$ l'aire du parallélogramme qui est la base de $\mathcal{Q}$, et h la hauteur. Alors $\mathcal{A} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$, où les vecteurs sont $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ dans $\mathcal{Q}$.

Soit la hauteur $h = AA' \cos(\alpha)$ où α est l'angle entre $\overrightarrow{A'A}$ et $\overrightarrow{A'H}$, où H est le point sur le plan $ABCD$ tel que $\overrightarrow{A'H}$ est perpendiculaire au plan $ABCD$

Donc $\mathcal{V} = AB.AC.AA' \cos(\alpha) \sin(\theta)$, où θ est l'angle aigu entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Il suffit maintenant de voir que $|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AA'}| = AB.AC.AA' \cos(\alpha) \sin(\theta)$.

En effet, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AA'} = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HA'})$.

En développant : $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AA'} = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AH} + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{HA'}$.

Or $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ est orthogonal au plan $ABCD$ donc à $\overrightarrow{AH}$, d'où $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AA'} = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{HA'}$. Soit

$\vec{W} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ alors $\vec{W}$ est colinéaire à $\overrightarrow{HA'}$ d'où $|\vec{W}.\overrightarrow{HA'}| = \|\vec{W}\|.\|\overrightarrow{HA'}\|$.
Or $\|\vec{W}\| = AB.AC\sin(\theta)$ et $HA' = h = AA'\cos(\alpha)$. □

Exercice 20

Soient les 3 points de l'espace $A(-1,-2,3), B(0,2,4)$ et $C(1,0,4)$.
1. Déterminer le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Calculer l'aire de ce parallélogramme.