Atelier problème - Arithmétique - 11 décembre

Dans un premier temps on va développer une méthode pour construire une fraction égale à un nombre dont le développement décimal est periodique.

i) Pour chacun des nombres décimaux suivants trouver une fraction qui lui est égale : $0,\overline{789}$, $0,456\,\overline{789}$.

ii) Soit x un nombre dont le développement décimal périodique s'écrit : $0,\overline{d_1 \dots d_q}$ où les d_i sont des chiffres décimaux, c'est à dire compris entre 0 et 10 (exclus). Donner une fraction égale à x.

iii) Soit x un nombre dont le développement décimal périodique s'écrit : $0, c_1 \dots c_p\overline{d_1 \dots d_q}$. Donner une fraction égale à x.
On vient donc de prouver le théorème : tout nombre compris entre 0 et 1 dont le développement décimal est ultimement périodique est rationnel.

iv) Prouver la réciproque : tout nombre rationnel a un développement décimal ultimement périodique.

v) Soit p un nombre premier distinct de 2 et 5 ; montrer que $1/p$ a un développement décimal périodique ; en déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $10^k - 1$ est un multiple de p.

Ce dernier résultat est un cas particulier du petit théorème de Fermat : si p est premier et a est un entier quelconque alors $a^p \equiv a\,(p)$.

vi) Montrer qu'une formulation équivalente du petit théorème de Fermat est : si p est premier et $0 \leq a < p$ alors $a^{p-1} \equiv 1\,(p)$.

Les questions suivantes visent à construire une démonstration du petit théorème de Fermat. Dans toute la suite p est un nombre premier fixé. On rappelle que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers modulo p, c'est à dire l'ensemble $\{0, 1, \dots, p-1\}$ muni de l'addition et de la multiplication modulo p. Dans tout ce qui suit on travaille dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, c'est à dire avec les opérations de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

vii) Montrer que si $a \in \mathbb{Z}/pZ$ est non nul alors a est inversible c'est à dire qu'il existe $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $ab = 1$.

viii) Montrer que pour tout a non nul et b dans $Zp\mathbb{Z}$ il existe un unique $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $b = ka$. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ non nul :

$$\prod_{b=1}^{p-1} b = \prod_{k=1}^{p-1} ka$$

ix) Conclure.