Université d'Aix-Marseille | Licences de mathématiques et informatique
Semestre 1 | 2015-2016

Introduction à l'analyse

Partiel 2 – 27 novembre 2015

Calculette et documents non autorisés — Durée : 2 heures

Exercice 1

Questions de cours
1. Soit $a \in]0, +\infty[$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Donner la définition du nombre a^x.
2. Enoncer le théorème de l'intégration par parties.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{5}} x\cos(5x)\,dx$.

Exercice 2

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\to x^{-\ln(x)}. \end{aligned}$$

1. Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \exp[-(\ln(x))^2]$.
2. Calculer

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

3. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer la dérivée de f sur cet intervalle.
4. Déterminer, en utilisant les théorèmes du cours, les ensembles $f(]0, 1[)$ et $f([1, +\infty[)$, puis en déduire l'ensemble $f(]0, +\infty[)$.

Exercice 3

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \end{aligned}$$

1. Étudier la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$: donner le domaine de définition, les calculs de limites et le tableau de variation de u.
2. En déduire l'ensemble de définition de f.
3. Calculer

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x).$$

4. Déterminer l'ensemble de dérivabilité $D_{f'}$ de f puis montrer que pour tout $x \in D_{f'}$:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{-x}}.$$

Exercice 4

Pour chaque intégrale suivante, on demande de justifier l'existence puis de la calculer.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+1}\,dx.$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx.$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos^2(x)\,dx.$