Corrections
Planche 1

1 Logique

Exercice 1 :

1. Il existe un lundi où je ne joue pas au foot.
2. Il existe un dimanche où il fait beau et où je ne fais pas de maths.
3. Il existe un lundi où il fait beau et où je fais des maths.

Exercice 2 :

1. L'assertion est fausse. S'il existait un tel x alors on aurait :
$$\forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0.$$
Or avec $y = -x$, on obtient $x + y = 0$.
La négation est :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0.$$
2. L'assertion est fausse. Pour le montrer, on peut prendre $x = y = 0$.
La négation est :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leq x.$$
3. L'assertion est vraie. Prenons $x = -1$, on a bien : $\forall x \in \mathbb{R},\ y^2 > x$.
La négation est : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 \leq x$.

Exercice 3 :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq n^2$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Rightarrow ((x = 0) \vee (y = 0))$.
3. $\forall A \subset \mathbb{N},\ A \neq \emptyset,\ \exists n_0 \in A,\ \forall n \in A,\ n_0 \leq n$.

Exercice 4 :
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq x \leq y$.
D'une part $x \geq 0$, donc $0 \leq x^2 \leq xy$, d'autre part, $y \geq 0$ donc $0 \leq xy \leq y^2$.
Par transitivité, on obtient : $0 \leq x^2 \leq xy \leq y^2$, d'où le résultat.
Pour la contraposée :

$$\begin{aligned}
&[\neg \left(0 \leq x^2 \leq y^2\right) \Rightarrow \neg(0 \leq x \leq y)] \\
\Leftrightarrow\ &[\neg \left((0 \leq x^2) \wedge (x^2 \leq y^2)\right) \Rightarrow \neg\left((0 \leq x) \wedge (x \leq y)\right)] \\
\Leftrightarrow\ &[\left((0 > x^2) \vee (x^2 > y^2)\right) \Rightarrow \left((0 > x) \vee (x > y)\right)]
\end{aligned}$$

Or on sait que si A et B sont deux expressions et que A est fausse alors on a : $A \vee B = B$. En effet, d'une part si B est fausse alors $A \vee B$ est fausse, donc si B est fausse, $A \vee B = B$. D'autre part, si B est vraie alors $A \vee B$ est vraie, donc si B est vraie, $A \vee B = B$. Dans tous les cas $A \vee B = B$. Ainsi, avec ce résultat, puisque pour $x \in \mathbb{R}$, $(0 > x^2)$ est fausse, on a :

$$\begin{aligned}&[\Big((0 > x^2) \vee (x^2 > y^2)\Big) \Rightarrow ((0 > x) \vee (x > y))] \\ &\Leftrightarrow [\Big(x^2 > y^2\Big) \Rightarrow ((0 > x) \vee (x > y))]\end{aligned}$$

Cela signifie que si $x^2 > y^2$, alors soit x est strictement négatif, soit x est positif, et dans ce dernier cas, on a : $x > y$.
La réciproque s'écrit :

$$\Big(0 \leq x^2 \leq y^2\Big) \Rightarrow (0 \leq x \leq y),$$

bien sûr cette réciproque est fausse : prendre $x = -1$ et $y = 2$, par exemple.

Exercice 5 :
On commence par une remarque : par convention la somme $1 + 2 + \cdots + n$ vaut 0 lorsque $n = 0$.
On va donc montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Initialisation : Pour $n = 1$ l'indentité est vraie car $1 = \frac{1*2}{2}$.
Héridité : Soit $n \geq 0$. On fait l'hypothèse d'hérédité suivante :
On a l'identité : $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons que l'identité ci-dessus est vraie pour $n + 1$, c'est à dire, montrons que : $1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Pour cela, en utilisant l'hypothèse d'hérédité, on écrit : $1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$.
Donc : $1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$.
Conclusion : La propriété est vraie au rang $n = 1$, elle est héréditaire pour $n \geq 1$, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6 :
On remarque tout d'abord que pour $n = 0$, on a $1 \geq 0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Pour $n = 1$, on a bien $2 \geq 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
Pour $n = 2$, on a bien $4 \geq 4$, donc la propriété est vraie pour $n = 2$.
Par contre pour $n = 3$ la propriété est fausse car $8 < 9$.
On va donc montrer que pour $n \geq 4$, on a $2^n \geq n^2$.

On procède de même par Initialisation/Hérédité/Conclusion :
La propriété est vraie pour $n = 4$ donc l'initialisation est vraie.
Pour l'hérédité, soit $n \geq 4$ tel que $2^n \geq n^2$. On a $2^{n+1} = 2 * 2^n \geq 2n^2$, grâce à l'hypothèse d'hérédité.
Il reste donc à montrer que $2n^2 \geq (n+1)^2$. Or $2n^2 = n^2 + n^2 = n^2 + n*n \geq n^2 + 4n$, car $n \geq 4$.
De plus $n^2 + 4n = n^2 + 2n + 2n \geq n^2 + 2n + 2 * 4$, toujours parce que $n \geq 4$.
Enfin $n^2 + 2n + 2 * 4 \geq n + 2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, ce qui conclut.
On a donc $2^n \geq n^2$ pour tout $n \geq 4$ et même pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{3\}$.

Exercice 7 :
Soit a un réel. On considère l'implication $\forall \varepsilon > 0,\ a \leq \varepsilon \Rightarrow a \leq 0$. Pour montrer cette implication, il suffit de montrer sa contraposée, qui s'écrit : $a > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0,\ a > \varepsilon$.

Cette implication se montre de la façon suivante : Si $a > 0$, alors prenons $\varepsilon = \frac{a}{2}$. Ainsi, ε vérifie bien $\varepsilon > 0$ et de plus, $a > \frac{a}{2} = \varepsilon$. Donc l'implication est vraie : on a bien exhibé un réel $\varepsilon > 0$ qui vérifie la propriété : $a > \varepsilon$.

Exercice 8 :
On montre que $\sqrt{2}$ est irrationnel par l'absurde.
On suppose donc qu'il existe p et q deux entiers non nuls premiers entre eux (c'est-à-dire que si un entier positif k divise à la fois p et q, alors $k = 1$) tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. En élevant au carré, on obtient : $2q^2 = p^2$. Donc p^2 est pair.
Montrons que si p^2 est pair alors p est pair aussi. Pour cela, on suppose que p^2 est pair et que p est impair. Dans ce cas, p s'écrirait sous la forme $p = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Mais alors : $p^2 = 4k^2+4k+1$, donc p^2 est impair (c'est la somme d'un entier pair : $4k^2 + 4k$ et de 1). Or on avait supposé que p^2 était pair ! On a là une contradiction. Donc si p^2 est pair, alors p est pair, et donc p s'écrit $p = 2k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
En repartant de $2q^2 = p^2$, on obtient : $2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$, donc $q^2 = 2k^2$. Ainsi q^2 est pair ! Donc q est pair.
Finalement p et q sont tous les deux pairs, donc 2 divise à la fois p et q, ce qui le fait que p et q sont premiers entre eux.
Donc l'hypothèse de départ : "$\sqrt{2}$ est irrationnel" est fausse. Donc $\sqrt{2}$ est rationnel.

2 Ensembles

Exercice 9 :

1. Montrons tout d'abord que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Si $A \cup (B \cap C)$ est vide alors l'inclusion est vraie : l'ensemble vide est inclus dans n'importe quel autre ensemble ! Sinon, soit $x \in A \cup (B \cap C)$. Alors soit $x \in A$ et dans ce cas, $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Cela signifie : $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Soit $x \in B \cap C$ et dans ce cas, $x \in B$ et $x \in C$. Puisque $x \in B$, $x \in A \cup B$ et puisque $x \in C$, $x \in A \cup C$. Donc $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$, ainsi $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Dans tous les cas, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, cela termine de montrer la première inclusion.

   On peut aussi procéder autrement : $A \subset A \cup B$ et $A \subset A \cup C$, donc $A \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. De même, $B \cap C \subset B$, donc $B \cap C \subset (A \cup B)$ et $B \cap C \subset C$, donc $B \cap C \subset (A \cup C)$. Ainsi $B \cap C \subset (A \cup B)$ et $B \cap C \subset (A \cup C)$, donc $B \cap C \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Finalement $A \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $B \cap C \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$, donc $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   Montrons maintenant la seconde inclusion : $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. Si $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ est vide alors il n'y a rien à faire. Sinon on peut choisir un x dans $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dans ce cas, $x \in (A \cup B)$ et $x \in (A \cup C)$. Soit $x \in A$ et dans ce cas $x \in A \cup (B \cap C)$, soit $x \notin A$ et dans ce cas, puisque $x \in (A \cup B)$ et $x \in (A \cup C)$, on a : $x \in B$ et $x \in C$. Donc $x \in B \cap C$, donc $x \in A \cup (B \cap C)$. Dans tous les cas, $x \in A \cup (B \cap C)$ et cela montre la seconde inclusion.

2. On commence par montrer la première implication $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$. Pour cela, supposons $A \subset B$ et montrons par l'absurde que $B^c \subset A^c$. Si B^c est vide, alors l'inclusion est vraie. Sinon, soit $x \in B^c$ et supposons que $x \in A$. Alors puisque $A \subset B$, $x \in B$. Mais $x \in B^c$, on a donc une contradiction. Donc notre hypothèse $x \in A$ est fausse, c'est-à-dire : $x \in A^c$. On a donc montré $B^c \subset A^c$, la première implication est donc vraie.

   Montrons maintenant la seconde implication : $B^c \subset A^c \Rightarrow A \subset B$. La première implication $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$, qui a été montrée ci-dessus, est vraie pour tout ensemble A et B. En particulier, elle est vraie pour les ensembles A^c et B^c. Cela s'écrit donc : $A^c \subset B^c \Rightarrow (B^c)^c \subset (A^c)^c$. Remarquer maintenant que $(A^c)^c = A$ et que $(B^c)^c = B$. Cela donne donc : $A^c \subset B^c \Rightarrow B \subset A$. La deuxième implication est donc vraie.

3. On veut montrer que
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

⋆ Montrons que $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$.
- Si $(A \cap B)^c$ est vide, alors l'assertion est vraie.
- Si $(A \cap B)^c$ est non vide, on considère un élément $x \in (A \cap B)^c$.
$$(A \cap B)^c = \{y \in E : y \notin A \cap B\}.$$
donc
$$x \notin A \cap B,$$
on en déduit que
$$x \notin A \qquad \text{ou} \qquad x \notin B$$
(sinon x appartient à la fois à A et à B et donc $x \in A \cap B$). d'où
$$x \in A^c \qquad \text{ou} \qquad x \in B^c$$
c'est-à-dire
$$x \in A^c \cup B^c.$$

Conclusion : $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$.

⋆ Montrons que $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$.
- Si $A^c \cup B^c$ est vide, alors l'assertion est vraie.
- Si $A^c \cup B^c$ est non vide, on considère un élément $x \in A^c \cup B^c$.
  → Supposons que $x \in A^c$, on a donc $x \notin A$ et comme $A \cap B \subset A$, $x \notin A \cap B$ c'est à dire
$$x \in (A \cap B)^c.$$
  → Supposons que $x \notin A^c$, alors $x \in B^c$ c'est-à-dire $x \notin B$ et comme $A \cap B \subset B$, $x \notin A \cap B$ c'est à dire
$$x \in (A \cap B)^c.$$

Conclusion : $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$.

Finalement :
$$\boxed{A^c \cup B^c = (A \cap B)^c.}$$

4. On veut montrer que
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

⋆ Montrons que $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$.
- Si $(A \cup B)^c$ est vide, alors l'assertion est vraie.
- Si $(A \cup B)^c$ est non vide, on considère un élément $x \in (A \cup B)^c$.
$$(A \cup B)^c = \{y \in E : y \notin A \cup B\}.$$
donc
$$x \notin A \cup B,$$

on en déduit que
$$x \notin A \qquad \text{et} \qquad x \notin B.$$
d'où
$$x \in A^c \qquad \text{et} \qquad x \in B^c$$
c'est-à-dire
$$x \in A^c \cap B^c.$$
Conclusion : $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$.

⋆ Montrons que $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$.
- Si $A^c \cap B^c$ est vide, alors l'assertion est vraie.
- Si $A^c \cap B^c$ est non vide, on considère un élément $x \in A^c \cap B^c$. On a donc :
$$x \in A^c \qquad \text{et} \qquad x \in B^c$$
c'est-à-dire x n'appartient ni à A ni à B donc x n'appartient pas à la réunion des deux ensembles, $x^n otin A \cup B$ c'est à dire
$$x \in (A \cup B)^c.$$

Conclusion : $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$.

Finalement :
$$\boxed{A^c \cap B^c = (A \cup B)^c.}$$

5. On veut montrer que
$$A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A.$$
⋆ Condition suffisante : montrons que $A \cup B = B \Longrightarrow A \cap B = A$.
Supposons que A et B soient deux ensembles tels que $A \cup B = B$. On a toujours $A \cap B \subset A$. Il suffit donc de montrer que $A \subset A \cap B$.
Par hypothèse, $A \cup B = B$ or $A \subset A \cup B$ donc $A \subset B$.
- si A est vide, on a toujours $A = \emptyset \subset A \cap B$;
- si A est non vide, on considère un élément $x \in A$. On a vu que $A \subset B$ donc $x \in B$. En résume :
$$x \in A \qquad \text{et} \qquad x \in B$$
donc $x \in A \cap B$.

Conclusion : $A \cap B = A$.

⋆ Condition nécessaire : montrons que $A \cup B = B \Longleftarrow A \cap B = A$.
Supposons que A et B soient deux ensembles tels que $A \cap B = A$. On a toujours $B \subset A \cup B$. Il suffit donc de montrer que $A \cup B \subset B$.
- si $A \cup B$ est vide, on a toujours $A \cup B = \emptyset \subset B$;
- si $A \cup B$ est non vide, on considère un élément $x \in A \cup B$. on a donc :
$$x \in A \qquad \text{ou} \qquad x \in B.$$
Si $x \in B$, il n'y a rien à démontrer. Si $x \in A$, par l'hypothèse $A = A \cap B$ donne $x \in B$.

Conclusion : $A \cup B = B$.

Finalement :
$$\boxed{A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A}$$

Exercice 10 :

— Les sous ensembles de $\{1,2,3\}$ sont les ensembles suivants :

$$\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}.$$

il y en a 8.

— Avant de traiter cette récurrence, dénombrons les sous ensembles de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$:

$$\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}$$

et

$$\{4\},\ \{4,1\},\ \{4,2\},\ \{4,3\},\ \{4,1,2\},\ \{4,1,3\},\ \{4,2,3\},\ \{4,1,2,3\}.$$

Remarquez que la deuxième liste est obtenue en ajoutant l'élément 4 à chacun des ensembles de la première liste. Il y a donc $8+8=2^3+2^3=2^4$ sous ensembles de $\{1,2,3,4\}$. Passons maintenant au cas général.

Pour $n=0$, l'assertion est vraie car l'ensemble vide possède $2^0=1$ seul sous ensemble : l'ensemble vide lui-même. Supposons la propriété vraie pour $n \geq 0$. On considère un ensemble X à $n+1$ éléments. Il est donc non vide car $n+1>0$. Soit donc $x \in X$. Les sous ensembles de X sont les sous ensembles de $X\backslash\{x\}$ et les sous ensembles de $X\backslash\{x\}$ auxquels on a rajouté l'élément x. En effet, soit Y un sous ensemble de X. Premier cas : $x \notin Y$, alors dans ce cas, Y est un sous ensemble de $X\backslash\{x\}$. Deuxième cas, $x \in Y$ et dans ce cas, Y est un sous ensemble de $X\ \backslash\{x\}$ auquel on a rajouté x car $Y=Y\backslash\{x\}\cup\{x\}$ et $Y\backslash\{x\}$ est un sous ensemble de $X\backslash\{x\}$. Donc le nombre de sous ensembles de X est le nombre de sous ensembles de $X\backslash\{x\}$ (par hypothèse de récurrence, il y en a 2^n) plus le nombre de sous ensembles de $X\backslash\{x\}$ auxquels on a rajouté x (il y en a autant que de sous ensembles de $X\backslash\{x\}$). Il y a donc en tout $2^n+2^n=2^{n+1}$ sous ensemble de X. Ce qui conclut la preuve.

Exercice 11 :

$A=\{1,3,5,9,15,45\}$ et $B=\{1,3,5,11,15,33,55,165\}$.
$A\cap B=\{1,3,5,15\}$, $A\cup B=\{1,3,5,9,11,15,33,45,55,165\}$.

Exercice 12 :

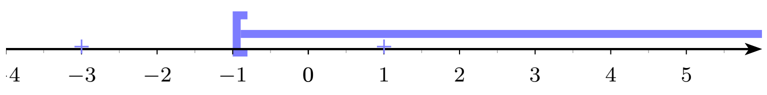
$A\cup B=[1,6]$, $A\cap B=[3,4]$, $A\backslash D=[1,2[\cup]2,4]$.
$(A\cap B)\times A=[3,4]\times[1,4]$, $B^c\times(A\cup C)=(]-\infty,3[\cup]6,+\infty[)\times[1,5]$ et $(A\backslash D)\times D=[1,2[\cup]2,4]\times\{2\}$.

Exercice 13 :

1. $A=\{x\in\mathbb{R}\ :\ |x-1|\leq|x+3|\}$

   Heuristique : **Attention, ceci n'est pas une preuve, cela sert juste à avoir une idée de la solution !!**

   $|x-1|$ représente, sur la droite réelle, la distance entre les nombres x et 1. De même $|x+3|$ représente la distance entre x et -3. Dire $|x-1|\leq|x+3|$ c'est dire que x doit être plus proche de 1 que de -3 (ou à égale distance des deux). Représentons ça sur un dessin :



La demi-droite au-dessus de la droite réelle représente l'ensemble des points plus proches de 1 que de -3, c'est l'ensemble des éléments de A. On devine donc le résultat à obtenir : $A = [-1\,;\,+\infty[$.

Preuve

$$\begin{aligned}
x \in A &\iff |x-1| \leq |x+3| \\
&\iff -|x+3| \leq x-1 \leq |x+3| \\
&\iff -|x+3| \leq x-1 \qquad \text{et} \qquad x-1 \leq |x+3| \\
&\iff \underbrace{|x+3| \geq 1-x}_{(a)} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{x-1 \leq |x+3|}_{(b)}
\end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned}
|x+3| \geq 1-x &\Leftrightarrow (x+3 \geq 0 \text{ et } x+3 \geq 1-x) \quad \text{ou} \quad (x+3 \leq 0 \text{ et } -(x+3) \geq 1-x) \\
&\Leftrightarrow \underbrace{(x \geq -3 \text{ et } x \geq -1)}_{\Leftrightarrow x \geq -1} \quad \text{ou} \quad (x \leq -3 \text{ et } \underbrace{-3 \geq 1}_{\text{FAUX}}) \\
&\Leftrightarrow x \geq -1.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
x-1 \leq |x+3| &\Leftrightarrow (x+3 \geq 0 \text{ et } x+3 \geq x-1) \quad \text{ou} \quad (x+3 \leq 0 \text{ et } -(x+3) \geq x-1) \\
&\Leftrightarrow (x \geq -3 \text{ et } 3 \geq -1) \quad \text{ou} \quad (x \leq -3 \text{ et } x \leq -1) \\
&\Leftrightarrow x \geq -3 \quad \text{ou} \quad x \leq -1 \\
&x \in]-\infty\,;\,+\infty[.
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
x \in A &\iff x \geq -1 \qquad \text{et} \qquad x \in \mathbb{R} \\
&\iff x \in [-1\,;\,+\infty[.
\end{aligned}$$

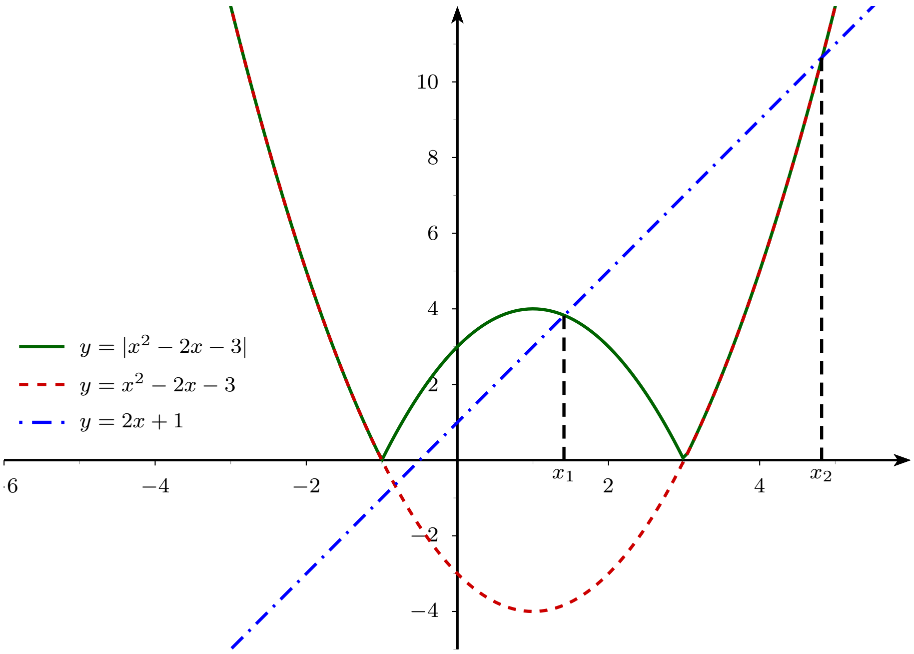
Conclusion :

$$\boxed{A = [-1\,;\,+\infty[.}$$

or

$$x+3 \geq x-1 \iff 3 \leq -1$$

2. $B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x^2-2x-3| \geq 2x+1\}$
   Heuristique :



Les courbes d'équations $y = |x^2 - 2x - 3|$ et $y = 2x + 1$ se croisent en deux points dont les coordonnées sont difficiles à déterminer graphiquement. Notons x_1 et x_2 leurs abscisses respectives avec $x_1 < x_2$. Le graphique nous permet de "deviner" le résultat à obtenir :

$$B =]-\infty\,;\,x_1] \cup [x_2\,;\,+\infty[.$$

Le graphique ne nous permet pas de "deviner" les valeurs exactes de x_1 et x_2.
Preuve Pour simplifier les notations, on pose $f(x) = x^2 - 2x - 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x \in B &\Leftrightarrow |f(x)| \geq 2x+1 \\ &\Leftrightarrow (f(x) \geq 0 \text{ et } x^2 - 2x - 3 \geq 2x+1) \text{ ou } (f(x) \leq 0 \text{ et } -x^2 + 2x + 3 \geq 2x+1) \end{aligned}$$

On va d'abord déterminer le signe de $f(x) = x^2 - 2x - 3$ suivant les valeurs de x :
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ et donc $x' = \frac{2-4}{2} = -1$ et $x'' = \frac{2+4}{2} = 3$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi :

$$x \in B \Leftrightarrow (x \in]-\infty\,;\,-1] \cup [3\,;\,+\infty[\text{ et } x^2 - 4x - 4 \geq 0) \text{ ou } (x \in [-1\,;\,3] \text{ et } 2 \geq x^2)$$

De même, on détermine le signe de $x^2 - 4x - 4$ suivant les valeurs de x :
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 32$ et donc $x' = \frac{4-4\sqrt{2}}{2} = 2 - 2\sqrt{2}$ et $x'' = 2 + 2\sqrt{2}$.

x	$-\infty$		$2-2\sqrt{2}$		$2+2\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-4x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où,

$$\begin{aligned}(x \in]-\infty\,;\,-1] \cup [3\,;\,+\infty[\text{ et } x^2-4x-4 \geq 0) &\\ \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,-1] \cup [3\,;\,+\infty[\text{ et } x \in]-\infty\,;\,2-2\sqrt{2}] \cup [2+2\sqrt{2}\,;\,+\infty[&\\ \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,-1] \cup [2+2\sqrt{2}\,;\,+\infty[&\end{aligned}$$

car $2-2\sqrt{2} > -1$ et $3 > 2+2\sqrt{2}$.
De plus, soit en utilisant le discriminant, soit directement, on obtient $x^2 \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}]$. Donc

$$\begin{aligned}(x \in [-1\,;\,3] \text{ et } 2 \geq x^2) &\Leftrightarrow x \in [-1\,;\,3] \text{ et } x \in [-\sqrt{2},;\,\sqrt{2}]\\ &\Leftrightarrow x \in [-1\,;\,\sqrt{2}].\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}x \in B &\Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,-1] \cup [2+2\sqrt{2}\,;\,+\infty[\text{ et } x \in [-1\,;\,\sqrt{2}]\\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,\sqrt{2}] \cup [2+2\sqrt{2}\,;\,+\infty[.\end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{B =]-\infty\,;\,\sqrt{2}] \cup [2+2\sqrt{2}\,;\,+\infty[.}$$

3. $C = \{x \in \mathbb{R} :\ |x-|x+1|| < 2\}$.

$$\begin{aligned}x \in C &\Longleftrightarrow |x-|x+1|| < 2\\ &\Longleftrightarrow -2 < x-|x+1| < 2\\ &\Longleftrightarrow x-2 < |x+1| < x+2\\ &\Longleftrightarrow (x+1 \geq 0 \text{ et } x-2 < x+1 < x+2) \quad \text{ou } (x+1 \leq 0 \text{ et } x-2 < -x-1 < x+2)\\ &\Longleftrightarrow (x \geq -1 \text{ et } -2 < 1 < 2) \quad \text{ou } (x \leq -1 \text{ et } -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2})\\ &\Longleftrightarrow x \geq -1 \quad \text{ou } -\frac{3}{2} < x \leq -1\\ &\Longleftrightarrow x > -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{C = \left[-\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[.}$$

Exercice 14 :
$A = \mathbb{R}$. En effet, d'une part $A \subset \mathbb{R}$, d'autre part, si $x \in \mathbb{R}$, alors $x \in [x, \infty[$, donc $x \in A$. Donc $\mathbb{R} \subset A$. Finalement $A = \mathbb{R}$.
$B = \emptyset$. En effet, supposons (par l'absurde) qu'il existe $x \in B$. Alors $x \notin [x+1, \infty[$. Donc $x \notin B$. Contradiction.

3 Applications

Exercice 15 :

	$f(\{a,b,c\})$	$f^{-1}(\{1,3\})$
1	$\{1,2,3,4\}$	$\{a,b\}$
2	$\{2,3\}$	$\{c,d\}$
3	$\{2\}$	$\emptyset$

Exercice 16 :

1. Soit $y \in F$. On a la suite d'équivalences suivante :

$$\begin{array}{ll} & y \in f(A \cap B) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in A \cup B,\ f(x) = y \\ \Leftrightarrow & \exists x \in E,\ x \in A \cup B \text{ et } f(x) = y \\ \Leftrightarrow & \exists x \in E,\ (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } f(x) = y \\ \Leftrightarrow & \exists x \in E,\ [(x \in A \text{ et } f(x) = y) \text{ ou } (x \in B \text{ et } f(x) = y)] \\ \Leftrightarrow & (\exists x \in E,\ x \in A \text{ et } f(x) = y) \text{ ou } (\exists x \in E,\ x \in B \text{ et } f(x) = y) \\ \Leftrightarrow & y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \\ \Leftrightarrow & y \in f(A) \cup f(B). \end{array}$$

   Ainsi, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. On utilise le résultat du cours suivant :

   Si E_1 et E_2 sont des parties de E telles que $E_1 \subset E_2$, alors $f(E_1) \subset f(E_2)$.

   On applique ce résultat intermédiaire à $E_1 = A \cap B$ et $E_2 = A$: on a $A \cap B \subset A$, donc on en déduit $f(A \cap B) \subset f(A)$. De même, comme $A \cap B \subset B$, on a $f(A \cap B) \subset f(B)$. Donc $f(A \cap B)$ est inclus à la fois dans $f(A)$ et dans $f(B)$, ce qui prouve que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

   On peut trouver facilement des contre-exemples à l'égalité : il suffit par exemple de prendre

$$E = \{0, 1\}\ ,\ F = \{a\}\ ,$$

   et $f : E \longrightarrow F$ telle que $f(0) = f(1) = a$. On pose $A = \{0\}$ et $B = \{1\}$. On a alors $A \cap B = \emptyset$, donc $f(A \cap B) = \emptyset$, et $f(A) = \{a\} = f(B)$, donc $f(A) \cap f(B) = \{a\}$. Donc $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ dans ce cas.

3. On suppose maintenant f injective. Rappelons que cela signifie que l'assertion suivante est vraie :

$$\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x'),$$

   ou encore, de manière équivalente, par contraposée :

$$\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ (x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x')).$$

   Pour montrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, il suffit de montrer les deux implications réciproques suivantes :

- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$: cela a été vu dans la question 2.
- $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$:

  Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors, $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$. Par définition de $f(A)$, il existe $x_A \in A$ tel que $f(x_A) = y$. De même, il existe $x_B \in B$ tel que $f(x_B) = y$. Alors, puisque f est injective, et que $f(x_A) = f(x_B)$, on a $x_A = x_B$. Donc $x_A \in A$ et $x_A \in B$, ce qui signifie que $x_A \in A \cap B$. En outre, $f(x_A) = y$, donc $y \in f(A \cap B)$. On en déduit donc que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
  Ainsi, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 17 :

1. Soit $x \in E$. La suite d'équivalences suivante est vraie :

$$\begin{array}{rl} & x \in f^{-1}(C \cup D) \\ \Leftrightarrow & f(x) \in C \cup D \\ \Leftrightarrow & f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D \\ \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(C) \text{ ou } x \in f^{-1}(D) \\ \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D). \end{array}$$

   Ainsi, on a $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

2. Soit $x \in E$. La suite d'équivalences suivante est vraie :

$$\begin{array}{rl} & x \in f^{-1}(C \cap D) \\ \Leftrightarrow & f(x) \in C \cap D \\ \Leftrightarrow & f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D \\ \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D) \\ \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D). \end{array}$$

   Ainsi, on a $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 18 :

Remarque 3.0.1 — *Rappelons que le schéma de démonstration standard pour montrer une injectivité est le suivant : pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est injective, on écrit :*

« Soient $x, x' \in E$. Supposons $f(x) = f(x')$.
(On fait alors un raisonnement pour en déduire que $x = x'$).
Donc $x = x'$. On en déduit que f est injective. »

— *De même, pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, le schéma de démonstration standard est le suivant :*

« Soit $y \in F$.
(On fait alors un raisonnement dans lequel on prouve qu'il existe un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.)
Donc $x \in E$ est tel que $f(x) = y$. On en déduit que f est surjective ».

1. On suppose f et g injectives. Soient $x, x' \in E$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Alors, par définition de $g \circ f$, on a
$$g(f(x)) = g(f(x')).$$
Or, g est injective, donc $f(x) = f(x')$. Mais f est aussi injective. Ainsi, on a $x = x'$. On en déduit que $g \circ f$ est injective.
2. On suppose f et g surjectives. Soit $z \in G$. Puisque $g : F \longrightarrow G$ est surjective, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Cependant, $f : E \longrightarrow F$ est surjective. Ainsi, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Donc $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Donc l'élément $x \in E$ est tel que $(g \circ f)(x) = z$. On en déduit que $g \circ f$ est surjective.
On peut aussi dire $f(E) = F$ car f est surjective donc $g \circ f(E) = g(F)$. Or $g(F) = G$ car g surjective. Finalement $g \circ f(E) = G$.
3. On suppose maintenant $g \circ f$ surjective. Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$. Par définition de $g \circ f$, cela signifie que $g(f(x)) = z$. Posons $y = f(x)$. Alors $y \in F$, et $g(y) = z$. Ceci prouve que g est surjective.

   On peut aussi dire $f(E) \subset F$ donc $g \circ f(E) \subset g(F)$, mais $g \circ f$ est surjective donc $g \circ f(E) = G$ donc $G \subset g(F)$ or $g(F) \subset G$ donc $g(F) = G$ et ainsi g est surjective.
Même si $g \circ f$ est surjective, f n'est pas nécessairement surjective. On peut trouver facilement des contre-exemples : prenons $E = \{0\}, F = \{0, 1\}$ et $G = \{a\}$. Alors si $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ sont définies par $f(0) = 0$ et $g(0) = g(1) = a$, on voit que $(g \circ f)(0) = a$, donc $g \circ f$ est surjective, mais f n'est pas surjective, puisque 1 n'a pas d'antécédent par f.
4. On suppose $g \circ f$ injective. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, ce qui s'écrit aussi $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Or, $g \circ f$ est injective, donc $x = x'$. Ceci prouve que f est injective.
Même si $g \circ f$ est injective, g n'est pas nécessairement injective. Il suffit de reprendre l'exemple de la question 3 : dans ce cas, $g \circ f$ est injective, mais g n'est pas injective, puisqu'elle envoie les éléments 0 et 1 sur le même élément a.

   Remarque 3.0.2 *Le contre-exemple vu dans l'exercice précédent est lié à deux exemples de fonctions injectives et surjectives, qu'il est intéressant d'avoir en tête :*

   Si $E = \{a\}$ est un singleton, et si F est un autre ensemble non vide, toute application $f : E \longrightarrow F$ est nécessairement injective, puisque E ne peut pas contenir deux éléments distincts qui auraient la même image.
Si maintenant on prend un ensemble de départ non vide E, et $F = \{a\}$ un singleton, toute application $f : E \longrightarrow F$ est nécessairement surjective, puisque pour tout $x \in E$, on doit avoir $f(x) = a$.

Exercice 19 :

1. Pour déterminer les réponses à ces questions, on peut s'aider d'un graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2$. Il faut en suite écrire une démonstration rigoureuse des résultats que l'on avance. On va ici procéder par inclusions réciproques.

   (i) $f([-1, 1]) = [0, 1]$. En effet $f([-1, 1]) \subset [0, 1]$ puisque si $y \in f([-1, 1])$, il existe $x \in [-1, 1]$ avec $y = x^2$. Ainsi, $0 \leq |x| \leq 1$ et donc on a $0 \leq |x|^2 \leq 1$ (cf. exercice 4). Or $y = |x|^2$, donc $y \in [0, 1]$.

Réciproquement, on a $[0,1] \subset f([-1,1])$, puisque si $y \in [0,1]$, on a $0 \leq \sqrt{y} \leq 1$ (la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est en effet croissante sur $\mathbb{R}_+$). Ainsi, $y = f(\sqrt{y})$ avec $\sqrt{y} \in [-1,1]$, donc $y \in f([-1,1])$.

(ii) $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc $Im(f) = f(\mathbb{R})$ est inclus dans $\mathbb{R}_+$. Réciproquement, si $y \in \mathbb{R}_+$, alors $\sqrt{y} \in \mathbb{R}$ est tel que $f(\sqrt{y}) = y$. Donc $y \in f(\mathbb{R})$, ce qui prouve que $\mathbb{R}_+ \subset \mathrm{Im}(f)$.

(iii) $f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$. En effet, on a vu a la question (i) que $f([-1,1]) \subset [0,1]$, ce qui prouve que $[-1,1] \subset f^{-1}([0,1])$. Réciproquement, si $x \in f^{-1}([0,1])$, si on pose $y = f(x)$, on a $y \in [0,1]$. Ainsi, puisque la fonction racine carrée est croissante, on a $0 \leq \sqrt{y} \leq 1$. Or $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x|$, donc $0 \leq |x| \leq 1$, ce qui montre que $x \in [-1,1]$. Donc $f^{-1}([0,1]) \subset [-1,1]$.

(iv) $f^{-1}(]-\infty,0]) = \{0\}$. En effet, on $f(0) = 0 \in]-\infty,0]$, donc $\{0\} \subset f^{-1}(]-\infty,0])$. Réciproquement, si $x \in f^{-1}(]-\infty,0])$, on a $x^2 \leq 0$. Un carré de nombre réel ne pouvant pas être strictement négatif, on doit avoir $x^2 = 0$, soit $x = 0$, donc $f^{-1}(]-\infty,0]) \subset \{0\}$.

2. L'application f n'est pas injective, puisque, par exemple, $f(-1) = f(1)$. Elle n'est pas surjective, puisque $Im(f) \neq \mathbb{R}$: -1 n'a pas d'antécédent par f, par exemple. A fortiori, f n'est pas bijective.

Exercice 20 :
On va montrer que l'application f est bijective, et donc surjective et injective. Pour cela, on va montrer qu'elle admet une application réciproque. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par :

$$g(x',y') = (\frac{x'+y'}{2}, \frac{x'-y'}{2}).$$

On vérifie que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Commençons par montrer que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $(x',y') = f(x,y)$. Alors on a :

$$(g \circ f)(x,y) = g(x',y') = \left(\frac{x'+y'}{2}, \frac{x'-y'}{2}\right),$$

et, par définition de (x',y'), on a

$$\left(\frac{x'+y'}{2}, \frac{x'-y'}{2}\right) = \left(\frac{(x+y)+(x-y)}{2}, \frac{(x+y)-(x-y)}{2}\right) = (x,y),$$

donc $(g \circ f)(x,y) = (x,y)$, ce qui prouve que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
De même, on montre que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Soit $(x',y') \in \mathbb{R}^2$, et posons $(x,y) = g(x',y')$. Alors

$$(f \circ g)(x',y') = f(x,y) = (x+y, x-y)\,.$$

Par définition de (x,y), on a

$$(f \circ g)(x',y') = (\frac{x'+y'}{2} + \frac{x'-y'}{2}, \frac{x'+y'}{2} - \frac{x'-y'}{2}) = (x',y')\,.$$

Ceci prouve que $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$. Ainsi, f et g sont réciproques l'une de l'autre, donc f est bijective.

Exercice 21 :

1. On définit une application $u : [0,+\infty[\longrightarrow [-1,+\infty[$ par $u(x) = \sqrt{x} - 1$. On voit facilement que cette application est bien définie puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$.
   On vérifie que $u \circ f = \mathrm{Id}_{[-1,+\infty[}$. En effet, si $x \in [-1,+\infty[$, on a :
   $$\begin{aligned} (u\circ f)(x) &= u(f(x)) = \sqrt{(f(x))} - 1 \\ &= \sqrt{f(x)} - 1 \\ &= \sqrt{(x+1)^2} - 1 \\ &= x + 1 - 1 \\ &= x \end{aligned}$$
   De même, on vérifie que $f \circ u = \mathrm{Id}_{[0,+\infty[}$. En effet, si $x \in [0,+\infty[$, on a :
   $$\begin{aligned} (f\circ u)(x) &= f(u(x)) = (u(x)+1)^2 \\ &= \left(\sqrt{x} - 1 + 1\right)^2 \\ &= (\sqrt{x})^2 \\ &= x \end{aligned}$$
   Ainsi, f est bijective, de réciproque g.
2. On vérifie que $g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$. En effet, si $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, si $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a la suite d'équivalences suivante :
   $$\begin{aligned} y = g(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \\ &\Leftrightarrow (x-1)y = x+1 \text{ puisque } x - 1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x(y-1) = y+1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \text{ puisque } y - 1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = g(y). \end{aligned}$$
   Ainsi, si $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, si on pose $y = g(x)$, on a :
   $$g \circ g(x) = g(y) = x,$$
   puisque $g(x) = y$. Ainsi, on trouve $g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$, donc g est bijective, et est sa propre réciproque.
3. L'application h n'est pas injective, puisque $h(0) = h(-2) = 0$. Elle n'est pas surjective, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire le polynome $x^2 + 2x$ sous forme canonique pour trouver :
   $$h(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \geq -1.$$
   Ainsi, $h(\mathbb{R}) \subset [-1,+\infty[$, donc h n'est pas surjective.
   On vérifie que $\tilde{h} : [-1,+\infty[\longrightarrow [-1,+\infty[$ est bijective, de réciproque $v : y \mapsto \sqrt{y+1} - 1$. L'application v est bien définie sur $[-1,+\infty[$, puisque que pour tout $y \in [-1,+\infty[$, on $y + 1 \geq 0$.

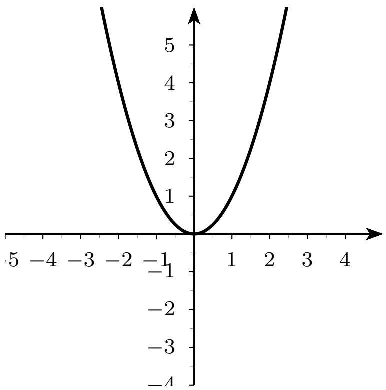
Il faut commencer par vérifier qu'on a bien $\tilde{h}\left([-1,+\infty[\right) \subset [-1,+\infty[$. Cela provient du fait que si $x \in [-1,+\infty[$, $\tilde{h}(x) = (x+1)^2 - 1 \geq -1$. De même, on vérifie que $v([-1,+\infty[) \subset [-1,+\infty[$.
Si $x, y \in [-1,+\infty[$, on a la suite d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned}
y = \tilde{h}(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = x^2 + 2x \\
&\Leftrightarrow \quad y = (x+1)^2 - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad y + 1 = (x+1)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x + 1 = \sqrt{y+1} \text{ puisque } y + 1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{y+1} - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = v(y).
\end{aligned}$$

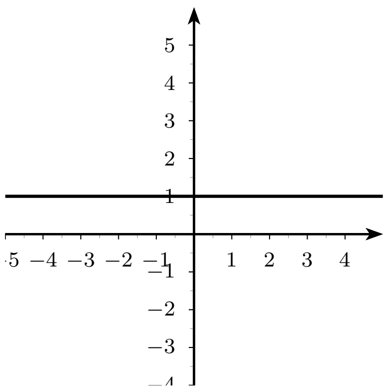
Ainsi, si $x \in [-1,+\infty[$, si on pose $y = \tilde{h}(x)$, on a $v(\tilde{h}(x)) = v(y) = x$. De même, si on pose $y' = v(x)$, on a $\tilde{h}(v(x)) = \tilde{h}(y') = x$. Ceci montre que $\tilde{h} \circ v = v \circ \tilde{h} = \mathrm{Id}_{[-1,+\infty[}$, donc h et v sont réciproques l'une de l'autre.

Exercice 22 :

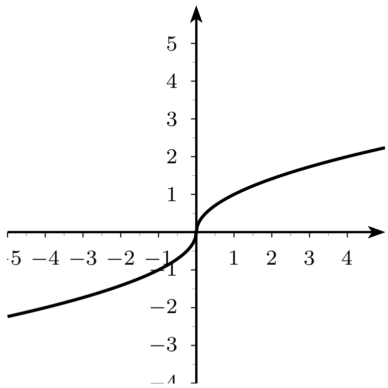
1. $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$: $f : x \mapsto x$ convient, puisqu'on a alors $f(1) = 1$.



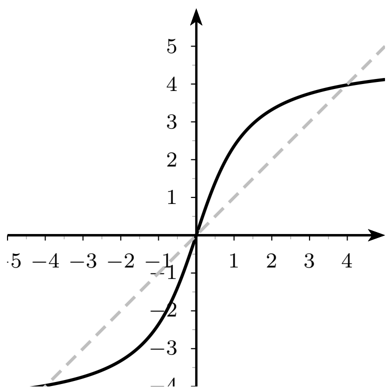
2. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$: $f : x \mapsto 1$ est la seule application satisfaisant cette assertion.



3. $\forall x,\, y \in \mathbb{R} : x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$: $f : x \mapsto x$ convient.



4. $\exists x \in \mathbb{R} : x < f(x)$: $f : x \mapsto 2x$ convient, puisqu'on a alors $1 < f(1)$.



Exercice 23 :

1. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.
2. $\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
4. $\forall x,\, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Leftarrow f(x) \leq f(y)$.

Exercice 24 :
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Il existe $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 1$.
2. f n'est pas croissante (il existe $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$ et $f(x) > f(y)$).
3. f n'est pas croissante ou pas positive ($\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ et $f(x) > f(y)$ ou $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$).
4. $\forall x \in [0\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$ et $f(x) \leq f(y)$.