Corrections
Planche 2

1 Opérations sur les réels, inégalités dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 :
On va montrer que :

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$$

Pour cela, on écrit les trois fractions sous le même dénominateur : $(a-b)(a-c)(c-b)$. Cela donne :

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \\
&= \frac{a(c-b)}{(a-b)(a-c)(c-b)} + \frac{b(a-c)}{(c-b)(a-b)(a-c)} - \frac{c(a-b)}{(a-c)(c-b)(a-b)} \\
&= \frac{a(c-b)+b(a-c)-c(a-b)}{(a-b)(a-c)(c-b)} \\
&= \frac{ac-ab+ba-bc-ca+cb}{(a-b)(a-c)(c-b)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On va montrer que :

$$\frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)} =$$

Pour cela, on écrit encore les fraction sous le même dénominateur :

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)} \\
&= \frac{(c-b)^3}{(a-b)(a-c)(c-b)} + \frac{(a-c)^3}{(c-b)(a-b)(a-c)} + \frac{(b-a)^3}{(a-c)(c-b)(a-b)} \\
&= \frac{c^3-3bc^2+3b^2c-b^3+a^3-3ca^2+3c^2a-c^3+b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{(ac-ab-c^2+cb)(a-b)} \\
&= \frac{-3bc^2+3b^2c-3ca^2+3c^2a-3ab^2+3a^2b}{a^2c-abc-a^2b+ab^2-ac^2+bc^2+abc-cb^2} \\
&= -3 * \frac{bc^2-b^2c+ca^2-c^2a+ab^2-a^2b}{a^2c-a^2b+ab^2-ac^2+bc^2-cb^2} \\
&= -3.
\end{aligned}$$

Exercice 2 :
On veut montrer qu'il existe un nombre réel rationnel $c \in \mathbb{Q}$ tel que $a < c < b$.
Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{1}{b-a}$ c'est à dire $\frac{1}{N} < b-a$. On considère l'ensemble

$$K = \left\{ k \in \mathbb{Z} \quad | \quad k \geq b \times N \right\}.$$

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, l'ensemble K est non vide. C'est donc une partie de $\mathbb{Z}$ non vide minorée : K admet un plus petit élément noté $k_0 \in \mathbb{Z}$ (faire un dessin). On a :

$$\frac{k_0}{N} \geq b \text{ et } \frac{k_0 - 1}{N} < b.$$

On en déduit que

$$\frac{k_0 - 1}{N} = \frac{k_0}{N} - \frac{1}{N} > b - (b - a) = a.$$

Finalement $a < \frac{k_0-1}{N} < b$ et $\frac{k_0-1}{N} \in \mathbb{Q}$; $c = \frac{k_0-1}{N}$ convient.

Exercice 3 :
On va montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $2xy \leq x^2 + y^2$.
Puisque le carré d'un réel est positif : $0 \leq (x-y)^2$. En développant : $0 \leq x^2 - 2xy + y^2$. On a ainsi : $2xy \leq x^2 + y^2$.

On va montrer que pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, $xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$. Pour cela on applique trois fois la question précédente : $xy + yz + xz \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + x^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2$.

Exercice 4 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que $n! = 1 * 2 * 3 * 4 * \cdots * n$.

On va prouver que pour tout entier non nul n, $2^{n-1} \leq n!$.
Pour $n = 1$, on a bien l'inégalité car : $2^0 = 1 \leq 1!$
Pour $n \geq 2$, remarquer tout simplement que : $2 \geq 2$, $3 \geq 2$, $4 \geq 2$, $\cdots$, $n \geq 2$.
Donc $n! = 2 * 3 * 4 * \cdots * n \geq \underbrace{2 * 2 * 2 * \cdots * 2}_{n-1 \text{ fois l'entier } 2} = 2^{n-1}$.

On va prouver que pout tout entier non nul n, $n^n \geq n!$.
Pour cela, remarquer que $1 \leq n$, $2 \leq n$, $3 \leq n$, $\cdots$, $n \leq n$.
Ainsi : $n! = 1 * 2 * 3 * 4 * \cdots * n \leq \underbrace{n * n * n * \cdots * n}_{n \text{ fois l'entier } n} = n^n$

On a bien montré que pour tout entier n non nul : $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 5 :
On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, +\infty[$, $(1+x)^n \geq (1+nx)$.
Pour $n = 0$, l'inégalité est vérifiée car $1 \geq 1 + 0$.
Pour $n = 1$, l'inégalité est également vérifiée car $(1+x)^1 \geq 1 + x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, posons $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)^n - (1+nx)$. On va étudier la fonction f et montrer qu'elle est positive.
On commence par dériver la fonction f : $\forall x \in [-1, +\infty[$, $f'(x) = n(1+x)^{n-1} - n$.
On peut maintenant en déduire le sens de varaiation de f : puisque $n \geq 2$, on a $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (1+x)^{n-1} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.
Cette fonction est donc croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-1, 0]$, elle atteint donc son minimum en 0 (faire un graphe pour s'en convaincre).
Ainsi : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $f(x) \geq f(0) = 0$.

On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, +\infty[$, $f(x) \geq 0$.

Exercice 6 :
Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ et $n \in \mathbb{N}$. Posons $x := a - 1$, puisque x ainsi défini est positif, en particulier $x \in [-1, +\infty[$ et donc le résultat démontré à l'exercice 5 s'applique.
Ainsi : $a^n = (1+x)^n \geq 1 + nx$ et comme $x > 0$, on a : $1 + nx \to +\infty$, lorsque $n \to +\infty$. Donc $a^n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 7 :
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $k \in \mathbb{N}$, on va exprimer x_{n+1} en fonction de x_n.
$x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)^k} = \frac{an^k}{(n+1)^k}\frac{a^n}{n^k} = \frac{an^k}{(n+1)^k}x_n$. Définissons la suite $b_n = \frac{an^k}{(n+1)^k}$.
Intuitivement : “à partir d'un certain rang la suite (b_n) est très proche de a, or $a > 1$ donc la suite (b_n) dépasse 1 à partir d'un certain rang”.
Posons $P(x) = ax^k - (x+1)^k$. P est un fonction polynomiale de degré k de coefficient dominant $a - 1 > 0$. Donc $P(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0) > 0$. Donc $an_0^k - (n_0+1)^k > 0$, et $\frac{an_0^k}{(n_0+1)^k} > 1$.
Donc en posant $b := b_{n_0}$ on a : $b > 1$, montrons que ce réel b convient.
On va montrer que pour tout entier $n \geq n_0$, $x_{n+1} \geq bx_n$.
Soit $n \geq n_0$, d'une part $x_{n+1} = b_n x_n$, d'autre part la suite (b_n) est croissante. En effet, pour tout entier n non nul, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = (\frac{n+1}{n+2}\frac{n+1}{n})^k = (\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n})^k \geq 1$.
On a : $x_{n+1} = b_n x_n$ et pour $n \geq n_0$, $b_n \geq b_{n_0} = b$. Comme la suite (x_n) est positive : $x_{n+1} = b_n x_n \geq bx_n$.

Maintenant, en vue de montrer que la suite (x_n) tend vers $+\infty$, montrons par récurrence que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \geq b^{n-n_0}x_{n_0}$.
Initialisation : Pour $n = n_0$, on a bien : $x_{n_0} \geq x_{n_0} = b^{n_0-n_0}x_{n_0}$.
Hérédité : On suppose que pour $n \geq n_0$, on a : $x_n \geq b^{n-n_0}x_{n_0}$. Montrons que $x_{n+1} \geq b^{n+1-n_0}x_{n_0}$.
D'après ce qui vient d'être montré, puisque $n+1 \geq n_0$, on a : $x_{n+1} \geq b * x_n$ et d'après l'hypothèse de récurrence, $x_{n+1} \geq b * b^{n-n_0}x_{n_0} = b^{n+1-n_0}x_{n_0}$.
Conclusion : La propriété $x_n \geq b^{n-n_0}x_{n_0}$ est vraie au rang n_0, elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Enfin, d'après l'exercice 6, puisque $b > 1$, on a : $b^n \to +\infty$, de plus la suite (x_n) vérifie à partir du rang n_0, $x_n \geq b^n \frac{x_{n_0}}{b^{n_0}}$, donc la suite (x_n) tends vers l'infinie quand n tend vers l'infinie.

Exercice 8 :
Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. On veut montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k &= (1-x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n) \\ &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n \\ &\quad\; - x - x^2 - x^3 - \ldots - x^n - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1}\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Exercice 9 :
1. On cherche deux réels a, b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}. \tag{1}$$

Pour cela, on remarque que nécessairement, si de tels a et b existent, alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, on doit avoir, en multipliant l'équation (1) par $x(x+1)$:

$$1 = a(x+1) + bx,$$

c'est-à-dire $(a+b)x+a=1$. Puisque cette équation est vraie pour tout x différent de 0 et 1, on doit avoir $a+b=0$ et $a=1$, donc $a=1$, $b=-1$.
Cela montre que si a,b existent, on a $a=1, b=-1$. Cela ne répond pas encore tout-à-fait à la question : en toute rigueur, il faut maintenant vérifier que la formule $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ est correcte. C'est un calcul simple de réduction au même dénominateur (par ailleurs équivalent au calcul réalisé juste au dessus).
De fait, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$, on a :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

2. On va répondre à la question en utilisant d'abord des notations intuitives pour comprendre ce qu'il se passe, puis de manière plus élaborée, avec des sommes indexées.
On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

La question 1 nous indique que chaque terme de la somme se décompose de la façon suivante :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi, on peut réécrire S_n :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + ... + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

On voit que chaque terme de la somme se décompose en la somme de deux sous-termes, dont le deuxième s'annule avec le premier sous-terme du terme suivant. On parle de *somme téléscopique*.
Avec les sommes indexées, on peut écrire ce calcul avec des notations plus précises. Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&= 1 + \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

On retrouve le même résultat. Pour bien comprendre ces calculs, il faut faire bien attention aux indices de sommations, et ne pas hésiter à réécrire explicitement ce qu'ils signifient, à la manière du calcul fait plus haut. Par exemple, pour passer de la troisième à la quatrième ligne, on peut faire mentalement les étapes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1} = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Exercice 10 :
Dans cette exercice, on cherche à exprimer une condition du type $x \in [a, b]$ avec a et b deux réels en une condition du type $|x - \alpha| \leq \beta$ avec α et β deux autre réels. Pour cela, gardez à l'esprit que la condition $x \in [a, b]$ signifie $a \leq x \leq b$ et que la condition $|x - \alpha| \leq \beta$ équivaut à :

$$-\beta \leq x - \alpha \leq \beta, \tag{2}$$

c'est-à-dire :

$$-\beta + \alpha \leq x \leq \beta + \alpha. \tag{3}$$

On peut voir aussi que la relation $|x-\alpha| \leq \beta$ exprime que le réel x se situe à une distance inférieure ou égale à β du réel α.

1. Les réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \in [-1, 5]$ vérifient $-1 \leq x \leq 5$. On cherche les réels α et β tels que :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \in [-1, 5] \Leftrightarrow |x - \alpha| \leq \beta).$$

   Il y a plusieurs façons de procéder. La plus simple consiste à remarquer que si $-1 \leq x \leq 5$ alors $-3 \leq x - 2 \leq 3$ et donc la relation (2) a lieu avec $\alpha = 2$ et $\beta = 3$.

   On peut voir les choses d'une façon plus "géométrique". Sur l'axe réel, on trace les points -1 et 5. On remarque ensuite que les points sur l'intervalle $[-1, 5]$, qui est de longueur 6, sont les points situés au plus à une distance 3 du centre de l'intervalle, qui est ici 2 (en effet $\frac{-1+5}{2} = 2$). D'après la remarque faite au début, cela signifie que $\beta = 3$ et $\alpha = 2$, comme plus haut.

   On peut enfin calculer les réels α et β. D'une part, la condition $|x - \alpha| \leq \beta$ s'exprime par l'inégalité (3) de la façon suivante :

   $$-\beta + \alpha \leq x \leq \beta + \alpha.$$

   D'autre part, la condition $x \in [-1, 5]$ est équivalente à :

   $$-1 \leq x \leq 5.$$

   On est donc ramené au calcul de $-\beta + \alpha = -1$ et $\beta + \alpha = 5$. Si l'on ajoute les deux égalité, on obtient : $2\alpha = 4$ et donc $\alpha = 2$, encore une fois. De $\beta+\alpha = 5$, on tire alors : $\beta = 3$, comme plus haut. Finalement :

   $$x \in [-1, 5] \Leftrightarrow |x - 2| \leq 3.$$

2. On cherche à exprimer : $x \in]2, 5[$. On utilise la deuxième méthode par exemple : le centre de l'intervalle est 3.5, donc $\alpha = 3.5$. La longueur de l'intervalle est 3, donc $\beta = 1.5$. Essayez de retrouver ce résultat par le calcul (la dernière méthode utilisée pour résoudre le 1.). Ainsi :

   $$x \in]2, 5[\Leftrightarrow |x - 3.5| < 1.5.$$

3. La condition est : $x \in [-5, -3]$, le calcul donne : $-\beta+\alpha = -5$ et $\beta+\alpha = -3$. En ajoutant les deux égalités, il vient : $2\alpha = -8$, soit $\alpha = -4$ (le centre de l'intervalle). De $\beta + \alpha = -3$, on trouve $\beta = 1$ (la moitié de la longueur de l'intervalle). La première méthode aurait donnée : $-5 \leq x \leq -3$ donne : $-1 \leq x + 4 \leq 1$, donc $\alpha = -4$ et $\beta = 1$. Donc :

   $$x \in [-5, -3] \Leftrightarrow |x + 4| \leq 1.$$

4. On cherche maintenant à résoudre le cas plus abstrait où $x \in]a, b|$ où a et b sont deux réels. Géométriquement, on peut dire que puisque α correspond au centre de l'intervalle, on a $\alpha = \frac{a+b}{2}$, ensuite, puisque β correspond à la moitié de la longueur de l'intervalle, $\beta = \frac{b-a}{2}$.
   On peut bien sûr résoudre ce problème par le calcul : $\alpha - \beta = a$ et $\alpha + \beta = b$. En ajoutant les deux égalités, on trouve $2\alpha = a + b$, donc $\alpha = \frac{a+b}{2}$. Comme $\alpha + \beta = b$, on trouve : $\beta = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}$. Finalement :
$$x \in]a, b[\Leftrightarrow |x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}.$$

Exercice 11 :
La condition $|x - 1| \leq 4$ s'exprime par une condition du type $x \in [a, b]$ avec a et b bien choisie, on fait ici l'inverse de l'exercice précédent.
$$|x - 1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5.$$
Donc $x \in [-3, 5]$.

Passons maintenant à $|x + |x|| \geq 2$. Il faut ici étudier la fonction $f : x \mapsto |x + |x||$. Si $x \leq 0$ alors $f(x) = 0$, tandis que si $x > 0$ alors $f(x) = 2x$. On voit déjà que si x vérifie $|x + |x|| \geq 2$, alors x est forcément positif. Donc :
$$(f(x) \geq 2) \Leftrightarrow (x > 0 \wedge f(x) \geq 2) \Leftrightarrow (x > 0 \wedge 2x \geq 2) \Leftrightarrow (x \geq 1).$$
Donc $x \in [1, +\infty|$.

Exercice 12 :

a. On cherche à montrer que pour tout x et y réels :
$$||x| - |y|| \leq |x + y|.$$
(Il faut absolument connaître cette (deuxième) inégalité triangulaire.
Elle découle de la première inégalité triangulaire que l'on rappelle et que l'on démontre ci-dessous :
$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$
La preuve de cette première inégalité triangulaire consiste tout simplement à remarquer que :
$$-|x| \leq x \leq |x| \text{ et } -|y| \leq y \leq |y|,$$
ainsi, en ajoutant les deux inégalités, il vient :
$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|,$$
et donc $|x + y| \leq |x| + |y|$, comme annoncé.)

Revenons donc à la preuve de :
$$||x| - |y|| \leq |x + y|.$$
On écrit d'abord que $x = x + y - y$ et on applique la première inégalité triangulaire à $x + y$ et $-y$:
$$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |-y|,$$
Et donc, puisque $|-y| = |y|$:
$$|x| - |y| \leq |x + y|. \tag{4}$$

On effectue maintenant le même raisonnement en écrivant : $y = y + x - x$ et en appliquant encore la première inégalité triangulaire :

$$|y| \leq |y + x| + |x|,$$

et donc,

$$|y| - |x| \leq |x + y|. \tag{5}$$

Grâce à (4) et (5) on obtient finalement :

$$||x| - |y|| \leq |x + y|.$$

Noter que cette inégalité s'écrit aussi avec $-y$:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Pourquoi ?

b. On veut maintenant montrer que $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$, pour x et y dans $\mathbb{R}$ et $y \neq 0$. On remarque dans un premier temps que si x et y sont deux réels alors : $|x\ y| = |x|\ |y|$. Pour le prouver on fait une disjonction des cas, suivant le signe de x et y :
Si $x \geq 0$ alors : si $y \geq 0$ on a : $|x\ y| = x\ y = |x|\ |y|$, et si $y < 0$, on a : $|x\ y| = -(x\ y) = x\ (-y) = |x|\ |y|$.
Si $x < 0$ alors : si $y \geq 0$ on a : $|x\ y| = -(x\ y) = (-x)\ y = |x|\ |y|$, et si $y < 0$, on a : $|x\ y| = x\ y = (-x)\ (-y) = |x|\ |y|$.
Dans tous les cas, on a l'égalité avancée.
On peut aussi prouver cette inégalité plus rapidement en écrivant que $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$.

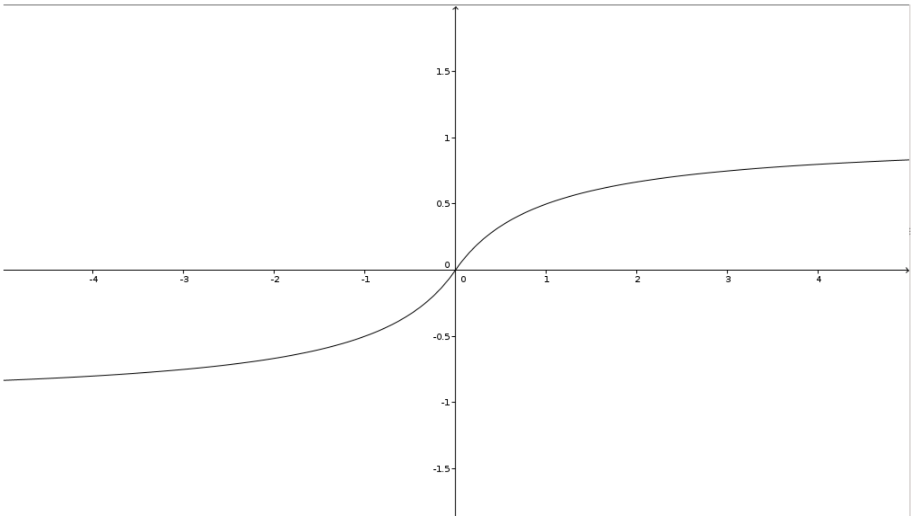
Appliquons-la à $\frac{x}{y}$ et y, on obtient :

$$|x| = |\frac{x}{y}y| = |\frac{x}{y}|\ |y|,$$

puisque $y \neq 0$, on peut donc écrire à partir de cela :

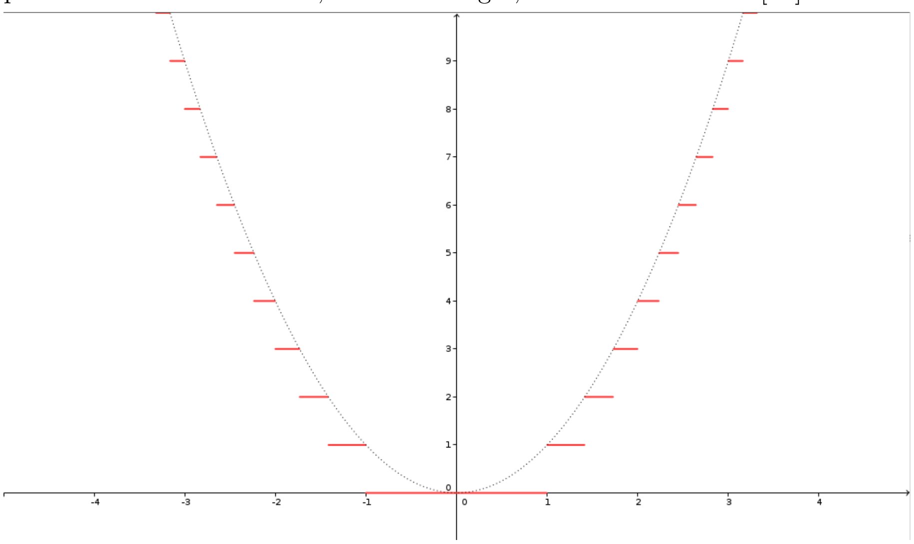
$$\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$$

Exercice 13 :
La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur n'est pas nul pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a $|x| \leq 1 + |x|$, donc $\left|\frac{x}{1+|x|}\right| \leq 1$ et donc la fonction f est bornée.
La fonction f admet la fonction $x \mapsto 1$ pour asymptote en $+\infty$ et la fonction $x \mapsto -1$ en $-\infty$.
Son graphe est :



Exercice 14 :

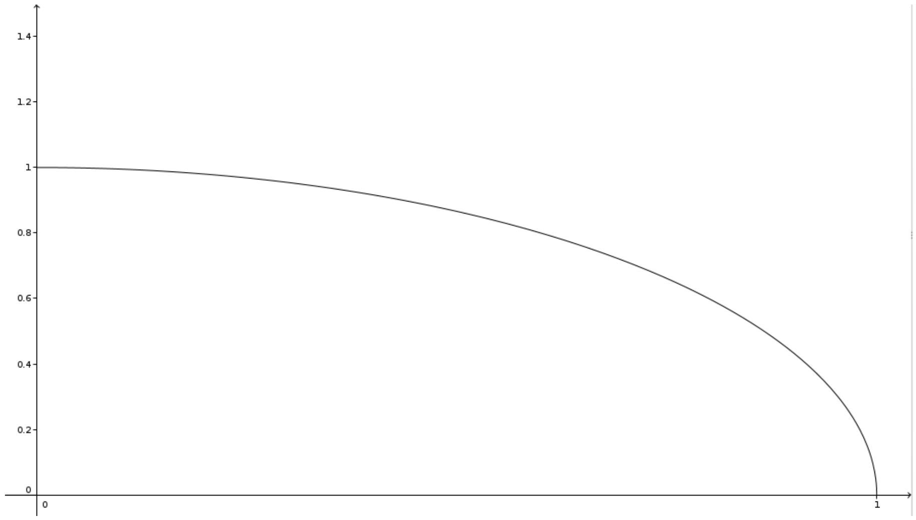
1. Deux fonctions sont représentées sur ce graphe. La première est la fonction $x \mapsto x^2$ en pointillés noirs. La seconde, en traits rouges, est la fonction $x \mapsto [x^2]$.



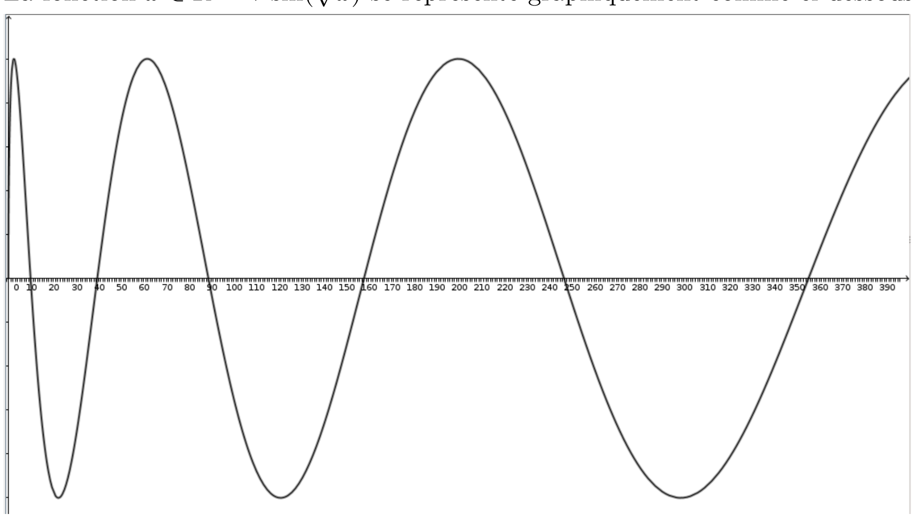
2. La fonction $x \in [0,1] \mapsto \sqrt{(1-x^2)}$ se représente graphiquement comme ci-dessous. Remarquer que cette fonction n'est pas périodique :

$$\nexists T > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sin(\sqrt{x+T}) = \sin(\sqrt{x}).$$

En effet, si un tel $T > 0$ existait, on aurait en $x = 0$ et en $x = T$: $\sin(\sqrt{T}) = \sin(0) = 0$ et $\sin(\sqrt{2T}) = \sin(\sqrt{T}) = 0$. Donc $\frac{\sqrt{T}}{\pi} \in \mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}\frac{\sqrt{T}}{\pi} \in \mathbb{Z}$, ce qui est impossible.



3. La fonction $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sin(\sqrt{x})$ se représente graphiquement comme ci-dessous :



Exercice 15 :
Soit $f\ : x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ et $g\ : x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(1+x) - x$. Montrons que f est positive et que g est négative.
Pour $x \in]-1, +\infty[$, notons tout d'abord que $-\frac{x}{1+x} = -1 + \frac{1}{1+x}$.
Dérivons ces fonctions, on a : $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$ et donc f est croissante si et seulement si $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0$. Or :

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow (1+x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

On conclut que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $]-1, 0]$, donc elle atteint son minimum en 0. Finalement :

$$\forall x \in]-1, +\infty[,\ f(x) \geq f(0) = 0.$$

On a ainsi montré la première inégalité.

Montrons maintenant que la fonction g est négative : $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$. Ainsi la fonction g est croissante lorsque $x \in]-1, 0]$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle atteint donc son maximum en 0 et donc :

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ g(x) \leq g(0) = 0.$$

On vient de montrer la seconde inégalité.

Exercice 16 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour que l'expression $x + \frac{1}{2x}$ ait un sens, il faut que x soit non nul. On suppose donc $x \in \mathbb{R}^*$.

Tout d'abord, si $x < 0$, on a $x+\frac{1}{2x} < 0 < 2$, donc $\mathbb{R}_-^* \subset \left\{z \in \mathbb{R}^*; z + \frac{1}{2z} \leq 2\right\}$. Supposons maintenant $x > 0$. On a alors la suite d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2x} \leq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x\left(x + \frac{1}{2x}\right) \leq 2x \text{ puisque } x > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{1}{2} \leq 2x \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + \frac{1}{2} \leq 0 \end{aligned}$$

Puisque le coefficient dominant de $P(x) = x^2-2x+\frac{1}{2}$ est positif, on a $x^2-2x+\frac{1}{2} \leq 0$ si et seulement si $x \in [x_1, x_2]$, où x_1, x_2 sont les racines du polynôme P. On détermine facilement que $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, on a $x^2 - 2x - 1 \leq 0$ si et seulement $x \in \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. En conclusion, si on note $E = \left\{x \in \mathbb{R}^*; x + \frac{1}{2x} \leq 2\right\}$, on trouve, puisque $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$:

$$E = \left(E \cap \mathbb{R}_-^*\right) \cup \left(E \cap \mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}_-^* \cup \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Si $x > 0$, on a $-2 < 0 < x + \frac{1}{2x}$, donc $x \in \left\{z \in \mathbb{R}^*; -2 < z + \frac{1}{2z}\right\}$, ou encore : $\mathbb{R}_+^* \subset \left\{z \in \mathbb{R}^*; -2 < z + \frac{1}{2z}\right\}$.

Supposons maintenant $x < 0$. On a la suite d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned} -2 < x + \frac{1}{2x} \quad &\Leftrightarrow \quad -2x > x\left(x + \frac{1}{2x}\right), \text{ puisque } x < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 > x^2 + \frac{1}{2} + 2x \end{aligned}$$

Puisque le coefficient dominant du polynôme $Q(x) = x^2 + 2x + \frac{1}{2}$ est positif, on a $x^2 + 2x + \frac{1}{2} < 0$ si et seulement si $x \in]y_1, y_2[$, où y_1, y_2 sont les racines de Q. On calcule facilement ces racines : $y_1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Puisque $x < 0$, on a donc $-2 < x + \frac{1}{2x}$ si et seulement si $x \in \left]-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$. Ainsi, si on note $F = \left\{z \in \mathbb{R}^*; -2 < z + \frac{1}{2z}\right\}$, on trouve, puisque $-1+\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$,

$$F = \left(F \cap \mathbb{R}_-^*\right) \cup \left(F \cap \mathbb{R}_+^*\right) = \left]-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \mathbb{R}_+^*.$$

3. On a $I = E \cap F$. En rassemblant les résultats des questions précédentes, on trouve :

$$I = \left(\mathbb{R}_-^* \cup \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) \cap \left(\left]-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \mathbb{R}_+^*\right),$$

soit (faire un dessin) :

$$I = \left]-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right],$$

ce qui montre que I est la réunion de deux intervalles.

4. Un majorant de I est un élément $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall y \in I, x \geq y$. Il est clair qu'un tel élément $x \in \mathbb{R}$ vérifie cette propriété si et seulement si $x \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. En effet, $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \in I$ donc tout majorant $x \in I$ vérifie : $x \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Réciproquement, $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ est un majorant de I donc l'ensemble des majorants de I est :

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}; x \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[.$$

Cet ensemble est non vide et contient un plus petit élément $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, qui est donc la borne supérieure de I, et vaut :

$$\sup I = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par ailleurs, $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \in I$, donc I admet un plus grand élément (ou maximum), égal à $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Un minorant de I est un élément $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in I$, $x \leq y$. On va montrer que $x \in \mathbb{R}$ est un minorant de I si et seulement si $x \leq -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.
L'ensemble des minorants de I est :

$$N = \left\{x \in \mathbb{R}; x \leq -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = \left]-\infty, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Cet ensemble admet un plus grand élément, qui est la borne inférieure de I :

$$\inf I = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Cette borne inférieure n'est pas un élément de I, donc I ne contient pas de plus petit élément (ou minimum).

Exercice 17 :
Cet exercice, un peu plus délicat, fait appel à quelques notions élémentaires d'arithmétique. Avant de passer à la correction, faisons tout d'abord un petit point sur les développements décimaux. Soit $x \in \mathbb{R}$. Un *développement décimal* de x est une écriture de x comme une somme infinie de la forme :

$$x = \pm \sum_{n=-n_0}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}, \text{ avec } a_n \in \{0, ..., 9\}.$$

L'écriture en somme infinie (ou encore en *série*) signifie simplement que

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \sum_{n=-n_0}^{m} a_n \cdot 10^{-n} = x.$$

On peut montrer que tout nombre réel admet un développement décimal. Un développement décimal n'est pas nécessairement unique, comme le montre l'exemple suivant :

$$0.999999... = 1.$$

En effet, si $x = 0.999999...$, on a $10x = 9.9999999...$, donc $10x - x = 9$, ou encore, $9x = 9$, donc $x = 1$. Ce genre de pathologie ne se produit que pour les nombres décimaux. Pour être tout-à-fait précis, on a le résultat suivant :
Si x est un nombre réel, x admet :

- un *unique* développement décimal si x *n'est pas* décimal.
- *deux* développements décimaux si x est décimal. L'un, se terminant par une suite infinie de 0 est appelé *développement propre*, l'autre, se terminant par une suite infinie de 9, est appelé *développement impropre*.

Par exemple, si $x = 0.15$, son développement propre est 0.15000000..., (abrégé en 0.15), et son développement impropre est 0.14999999999...., que l'on évite d'utiliser. Si x est un nombre non décimal, on pourra aussi qualifier son unique développement décimal de *propre*.

Passons maintenant à la résolution de l'exercice. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Supposons tout d'abord le développement décimal de x devient périodique. On va montrer que $x \in \mathbb{Q}$. Pour simplifier, supposons que $x > 0$ (si $x < 0$, on peut appliquer le raisonnement qui va suivre à $-x$, et si $x = 0$, le résultat est immédiat).
Écrivons $x = a_{-n_0}...a_{-1}a_0.a_1a_2a_3....$ Dire que le développement décimal de x devient périodique signifie qu'il existe $n_1, N \in \mathbb{N}$ tels que $a_{n+N} = a_n$ pour tout $n \geq n_1$. Dans ce cas, si $n \geq n_1$, on voit que la $n-$ième décimale de $10^N x$ est a_{n+N} (multiplier par 10^N décale les décimales de N rangs vers la gauche). Puisque les décimales sont périodiques à partir du rang n_1, cette décimale vaut aussi a_n. Les décimales de $10^N x$ et x sont donc identiques à partir de la n_1-ième décimale. Par conséquent, les décimales de $10^N x - x$ sont toutes nulles à partir de la n_1-ième décimale, puisque $a_n - a_{n+N} = 0$ pour $n \geq n_1$. Le nombre $10^N x - x$ est donc décimal, et on peut l'écrire sous forme d'une fraction décimale $\frac{q}{10^M}$, avec $q \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N}$. Alors, $10^N x - x = (10^N - 1)x = \frac{q}{10^M}$. On en déduit finalement que

$$x = \frac{q}{10^M(10^N - 1)},$$

donc x est un nombre rationnel.
On vient donc de montrer que si le développement décimal (propre ou impropre) d'un nombre réel devient périodique à partir d'un certain rang, ce nombre est rationnel. Bien sûr, si le développement en question est un développement impropre, le nombre est décimal, donc le résultat est immédiat.

Étudions maintenant la réciproque. Supposons $x \in \mathbb{Q}$. On va montrer que tout développement de x est périodique à partir d'un certain rang. Comme précédemment, on peut supposer que $x \geq 0$, quitte à appliquer le raisonnement qui va suivre à $-x$ dans le cas où x serait négatif. On note $x = a_{-n_0}...a_{-1}a_0.a_1a_2a_3...$ un développement quelconque de x.
On peut écrire $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$. Si pour tout $i \in \mathbb{N}$ on note d_i le reste dans la division euclidienne de $10^i p$ par q, on a $0 \leq d_i < q$. L'ensemble $\{0, ..., q-1\}$ (ou encore $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$) est fini, alors que la famille $\left(10^i p\right)$ est infinie. Nécessairement il doit donc exister deux entiers n_1, n_2 distincts, tels que $d_{n_1} = d_{n_2}$. En notations arithmétiques, cela signifie que :

$$10^{n_1} p \equiv 10^{n_2} p \, [q] \, .$$

Comme $n_1 \neq n_2$, on peut supposer par exemple $n_1 < n_2$, c'est-à-dire $n_2 = n_1 + N$, avec $N > 0$. L'entier q divise la différence $10^{n_1}p - 10^{n_2}p$, donc il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que

$$a = \frac{10^{n_1}p - 10^{n_2}p}{q} = 10^{n_1}\frac{p}{q} - 10^{n_1+N}\frac{p}{q}.$$

De fait, $10^{n_1}x - 10^{n_1+N}x$ est un entier, ce qui signifie que les décimales de $10^{n_1}x$ et $10^{n_1+N}x$ sont identiques. Pour $n \in \mathbb{N}$, la n-ième décimale de $10^{n_1}x$ est a_{n+n_1}, tandis que la n-ième décimale de $10^{n_1+N}x$ est a_{n+n_1+N}. Ainsi, pour $n \geq 0$, $a_{n+n_1} = a_{n+n_1+N}$, ou encore $a_n = a_{n+N}$ pour $n \geq n_1$.

On vient donc de montrer que si $x \in \mathbb{Q}$, n'importe quel développement décimal de x est ultimement périodique.

2 Fonctions usuelles

Exercice 18 :

1. On cherche un réel x tel que $\ln(x^2 - 1) = \ln(2 - x) + \ln(3 - x)$. Pour que cette égalité ait un sens, il faut que $x^2 - 1$ et $2 - x$ et $3 - x$ soient dans le domaine de définition de la fonction

logarithme népérien, c'est-à-dire qu'il faut que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

$$x^2-1>0 \text{ et } 2-x>0 \text{ et } 3-x>0.$$

Ainsi, une solution x doit vérifier :

$$x \in (]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[)\cap]-\infty,2[\cap]-\infty,3[,$$

c'est-a-dire (faire un dessin) :

$$x \in]-\infty,-1[\cup]1,2[.$$

Si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,2[$ vérifie $\ln(x^2-1)=\ln(2-x)+\ln(3-x)$, alors, en passant à l'exponentielle :

$$(x^2-1)=(2-x)(3-x),$$

et en développant, on trouve : $x=7/5$. On vérifie maintenant que $7/5 \in]-\infty,-1[\cup]1,2[$, donc l'unique solution de l'équation est $7/5$.

2. Raisonnons par équivalence :
   x est solution de $\exp(2x)-3\exp(x)+2=0$ si et seulement si $X:=\exp(x)$ vérifie l'équation polynomiale du second degré :
   $$X^2-3X+2=0,$$
   qui admet deux solutions strictement positives : 1 et 2.
   Finalement x est solution si et seulement si $\exp(x)=1$ ou $\exp(x)=2$, donc l'équation possède exactement deux solutions : 0 et $\ln(2)$.

Exercice 19 :

1. On commence par montrer que $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\exp(x)}{x}=+\infty$. Puisque $e>1$, on sait par l'exercice 6 que la suite $(\frac{e^n}{n})_n$ tend vers $+\infty$ quand $n\longrightarrow+\infty$.

   De fait, pour tout $x\in\mathbb{R}$, si $x\geq N$, on a, si on note $E(x)$ la partie entière de x :
   $$\frac{e^x}{x}\geq\frac{e^{E(x)}}{x}=\frac{E(x)}{x}\frac{e^{E(x)}}{E(x)}.$$

   En outre, $\frac{x-1}{x}\leq\frac{E(x)}{x}\leq\frac{x}{x}=1$, et $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x-1}{x}=1$. Donc, par encadrement, $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{E(x)}{x}=1$.

   Par ailleurs, puisque $E(x)\in\mathbb{N}$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, puisque $\lim_{x\longrightarrow+\infty}E(x)=+\infty$, et comme $\frac{e^n}{n}\underset{n\in\mathbb{N},n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, on trouve :
   $$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{e^{E(x)}}{E(x)}=\lim_{n\longrightarrow+\infty,n\in\mathbb{N}}\frac{e^n}{n}=+\infty.$$

   Ainsi,si on rassemble ce qui précède, on trouve :
   $$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{E(x)}{x}\frac{e^{E(x)}}{E(x)}=+\infty.$$

   On va maintenant calculer les limites demandées. Soit $\alpha>0$. On a :
   $$\frac{x^\alpha}{e^x}=\left(\frac{x}{e^{\frac{x}{\alpha}}}\right)^\alpha=\left(\frac{x/\alpha}{e^{x/\alpha}}\right)^\alpha\alpha^\alpha.$$

D'après ce qui précède, puisque $x/\alpha \longrightarrow +\infty$ quand $x \longrightarrow +\infty$, on a : $\frac{x/\alpha}{e^{x/\alpha}} \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$. Puisque $\alpha > 0$, on en déduit :

$$\left(\frac{x/\alpha}{e^{x/\alpha}}\right)^{\alpha} \alpha^{\alpha} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^{\alpha}}{\exp(x)} = 0.$$

2. On a :

$$\frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} = \frac{\ln(x)}{e^{\alpha\ln(x)}} = \left(\frac{\ln(x)^{\frac{1}{\alpha}}}{e^{\ln(x)}}\right)^{\alpha}.$$

On a $\frac{1}{\alpha} > 0$, et $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc par la question précédente, $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(x)^{\frac{1}{\alpha}}}{e^{\ln(x)}} = 0$. Ainsi, $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \left(\frac{\ln(x)^{\frac{1}{\alpha}}}{e^{\ln(x)}}\right)^{\alpha} = 0$, et donc :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} = 0.$$

3. On sait que pour $x > 0$, on a $\ln(x) = -\ln(x^{-1})$. Ainsi,

$$x^{\alpha}\ln(x) = \frac{-\ln(1/x)}{(1/x)^{\alpha}}.$$

Puisque $\lim_{x\longrightarrow0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, et que $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} = 0$, on en déduit que :

$$\lim_{x\longrightarrow0^+} x^{\alpha}\ln(x) = 0.$$

4. Pour tout $x > 0$, on a $x^x = e^{x\ln(x)}$, et $\lim_{x\longrightarrow0^+} x\ln(x) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi, $\lim_{x\longrightarrow0^+} x^x = e^0 = 1$.

Exercice 20 :

— $f_1 : x \longrightarrow \frac{x-1}{x+1}$.
$f_1(x)$ est défini pour tout x tel que $x+1 \neq 0$, i.e. pour $x \neq -1$. Ainsi, l'ensemble de définition de f_1 est :

$$D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

f_1 est un quotient de fonctions polynomiales (on dit que c'est la fonction associée à une *fraction rationnelle*), donc f_1 est dérivable sur son ensemble de définition. Ainsi, f_1 est dérivable sur D_{f_1}, de dérivée :

$$f_1'(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

— $f_2 : x \longrightarrow \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$.
$f_2(x)$ est défini pour tout x tel que $1-x \neq 0$ et $1-x^2 \neq 0$, i.e pour $x \notin \{-1, 1\}$. L'ensemble de définition de f_2 est donc :

$$D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

f_2 est la fonction associée à une fraction rationnelle, donc est dérivable sur son ensemble de définition D_{f_2}, de dérivée :

$$f_2'(x) = -\frac{-1}{(1-x)^2} - \frac{(-2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

— $f_3 : x \longmapsto \sqrt{x^2-2x-5}$.
$f_3(x)$ est défini si $x^2-2x-5 \geq 0$. Une étude usuelle de la fonction polynomiale du second degré x^2-2x-5 montre que $x^2-2x-5 \geq 0$ si et seulement si $x \in \left[1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}\right]$. Ainsi, on trouve :

$$D_{f_3} = \left[1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}\right].$$

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ mais n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^*_+$, donc f_3 est dérivable pour les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2-2x-5 > 0$. De fait, le domaine de dérivabilité de f_3 est :

$$\mathfrak{D}_{f_3} = \left]1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}\right[,$$

et la dérivée de f_3 sur cet intervalle est :

$$f_3'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-5}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-5}}.$$

— $f_4 : x \longmapsto \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}$.
$f_4(x)$ est défini si $\frac{2+3x}{5-2x} \geq 0$ et $5-2x \neq 0$.

x	$-\infty$		$-2/3$		$5/2$		$+\infty$
$2+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$5-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2+3x}{5-2x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc la fonction est définie sur

$$D_{f_4} = [-2/3,\ 5/2[.$$

f_4 est dérivable pour les $x \in D_{f_4}$ tel que $\frac{2+3x}{5-2x} > 0$. En utilisant le tableau de signe précédent, on obtient :

$$\mathfrak{D}_{f_4} =]-2/3,\ 5/2[.$$

f_4 est de la forme $\sqrt{u}$ dont la dérivée est $\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$ et u est de la forme $\frac{w}{v}$dont la dérivée est $\frac{w'v-wv'}{v^2}$ (avec $w = 2+3x$, $w' = 3$ et $v = 5-2x$, $v' = -2$) donc

$$u' = \frac{3(5-2x)-(2+3x)(-2)}{(5-2x)^2} = \frac{19}{(5-2x)^2}.$$

On obtient donc, pour $x \in \mathfrak{D}_{f_4}$:

$$f_4'(x) = \frac{1}{2}\frac{\frac{19}{(5-2x)^2}}{\sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}} = \frac{1}{2}\frac{19}{(5-2x)^2} \times \sqrt{\frac{5-2x}{2+3x}}$$

— $f_5 : x \longmapsto \exp(\sin(x)+\cos(x))$.
$f_5(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_5'(x) = (\sin(x)+\cos(x))' \exp(\sin(x)+\cos(x)) = (\cos(x)-\sin(x))\exp(\sin(x)+\cos(x)).$$

— $f_6 : x \longmapsto x^2\cos(\frac{1}{x})$
$f_6(x)$ est définie pour $x \neq 0$. Donc

$$D_{f_6} = \mathbb{R}^\star.$$

f_6 est dérivable sur son ensemble de définition donc

$$\mathfrak{D}_{f_6} = \mathbb{R}^\star$$

et sur cet ensemble, on a :

$$f_6'(x) = 2x\cos(\frac{1}{x}) + x^2 \times \frac{-1}{x^2}(-\sin(\frac{1}{x})) = 2x\cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}).$$

— $f_7 : x \longmapsto \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$
$f_7(x)$ est défini si $x \neq 0$ et $\frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0$ i.e pour $x \neq 0$. L'ensemble de définition de f_7 est donc

$$D_{f_7} = \mathbb{R}^\star.$$

f_7 est dérivable sur son ensemble de définition. On pose $u = \frac{1}{x}$ et $v = \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$, on a $u' = -\frac{1}{x^2}$ et

$$v' = \frac{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Ainsi,

$$f_7'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) + \frac{1}{x}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

— $f_8 : x \longmapsto \sin(x)\sin(1/x)$.
$f_8(x)$ est défini si $x \neq 0$ donc son ensemble de définition est

$$D_{f_8} = \mathbb{R}^\star.$$

f_8 est dérivable sur son ensemble de définition et on a :

$$f_8'(x) = \cos(x)\sin(1/x) + \sin(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos(1/x) = \cos(x)\sin(1/x) - \frac{1}{x^2}\sin(x)\cos(1/x).$$

Exercice 21 :
On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

1. $f(x)$ est défini pour tout x tel que $x > 0$ (pour le logarithme) et $x \neq 0$ (pour le dénominateur) donc pour $x > 0$. L'ensemble de définition de f est donc :

$$D_f = \mathbb{R}_+^\star =]0, +\infty[.$$

2. On a :

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

Et d'après le théorème de croissance comparée, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

3. f est dérivable sur son ensemble de définition et on a, pour $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

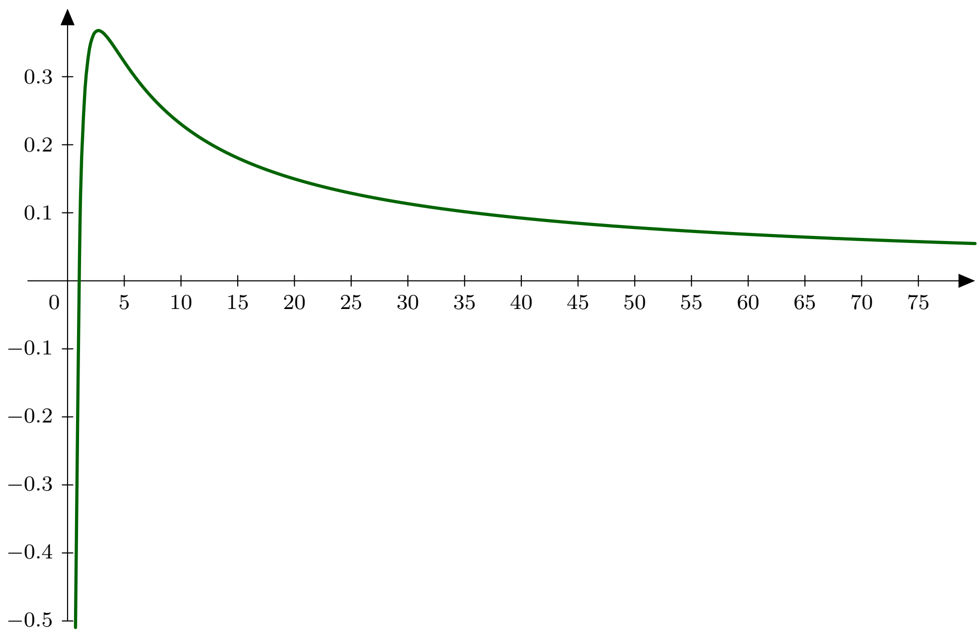
4. Pour tout $x \in D_f$, $x^2 > 0$.

$$1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}.$$

et

$$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \mathrm{e}.$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

5. 

Exercice 22 :
On veut étudier la fonction $g : x \mapsto x \exp(-x^2)$.

1. $g(x)$ est défini pour tout x tel que $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble de définition de g est donc :

$$D_f = \mathbb{R}.$$

2. On pose $X = x^2$, on a donc $x = \sqrt{X} = X^{1/2}$ et $\lim_{x\to+\infty} X = \lim_{x\to-\infty} X = +\infty$. Donc, d'après le théorème de croissance comparée avec $\alpha = 1/2$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x\exp(-x^2) = \lim_{X\to+\infty} \frac{X^{1/2}}{\exp(X)} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x\exp(-x^2) = \lim_{X\to+\infty} \frac{X^{1/2}}{\exp(X)} = 0.$$

3. **Périodicité** Rappel : Une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ de nombres réels est dite périodique de période $t \in \mathbb{R}$ (ou t-périodique) si

$$\forall x \in \mathcal{D},\ x + t \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f(x+t) = f(x).$$

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ donc, la première partie de la définition est vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour trouver un candidat pour la période t, on va résoudre $g(t) = g(0)$: on cherche à savoir s'il existe d'autres nombres non nuls dont l'image est la même que celle de 0.

$$\begin{aligned}
& g(t) = g(0) \\
\Leftrightarrow & t \exp(-t^2) = 0 \\
\Leftrightarrow & t = 0 \qquad \text{car} \qquad \exp(-t^2) > 0.
\end{aligned}$$

Donc g n'est pas périodique.

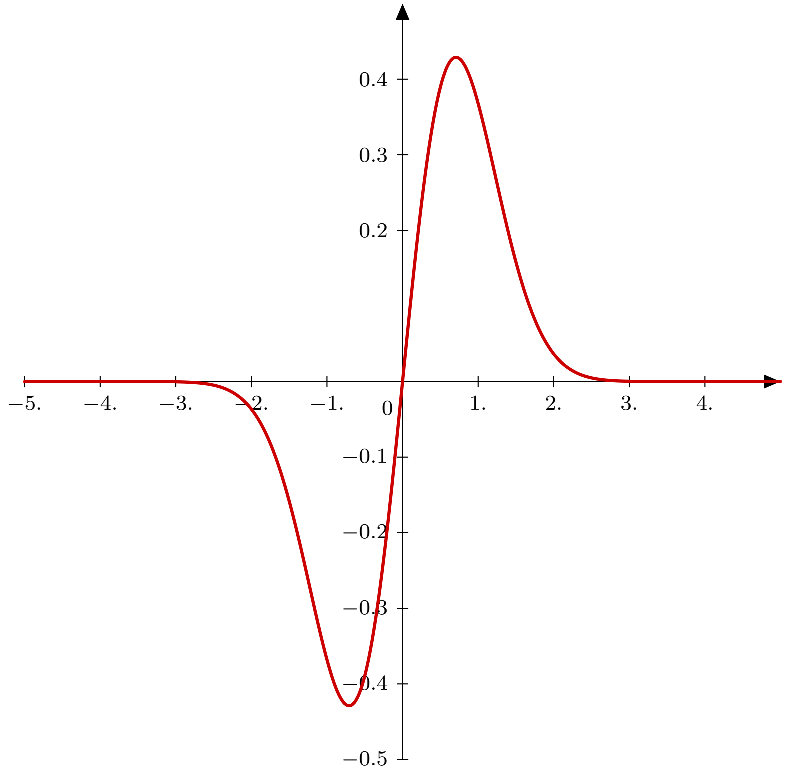
4. **Parité**
   — L'ensemble de définition de g est symétrique par rapport à 0 ;
   — Soit $x \in D_g$, $g(-x) = -x \exp(-(-x)^2) = -x \exp(-x^2) = -g(x)$
   Donc g est impaire ; sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère et il suffit d'étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_-$.
5. g est dérivable sur son ensemble de définition et on a, pour $x \in D_g$:

$$g'(x) = \exp(-x^2)\,(1 + x \times (-2x)) = \exp(-x^2)\left(1 - 2x^2\right).$$

6. Pour tout $x \in D_g$, $\exp(-x^2) > 0$.

$$1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1/2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↘	$-\frac{\sqrt{2e}}{2e}$	↗	$\frac{\sqrt{2e}}{2e}$	↘	0

7. 

3 Fonctions réciproques

Exercice 23 :

1. On veut montrer que $\widetilde{\sin} : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ est bijective. La fonction $\widetilde{\sin}$ est définie et dérivable sur $I = [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et on a :

$$\widetilde{\sin}'(x) = \cos(x).$$

Soit $x \in I$,

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x = \frac{-\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2} \right).$$

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\widetilde{\sin}'(x)$	0	+	0
$\widetilde{\sin}$	-1	$\nearrow$	1

La fonction $\widetilde{\sin}$ est strictement croissante sur I, elle est donc bijective de I dans $J = \widetilde{\sin}(I) = [-1, 1]$.

2. D'après le théorème de la bijection réciproque, arcsin est dérivable en tout point $x \in J$ tel

que la dérivée de $\widetilde{\sin}$ ne s'annule pas en $\arcsin(x)$.

$$\begin{aligned}
&\cos(\arcsin(x)) = 0 \\
\Leftrightarrow &\arcsin(x) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, && k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow &x = \pm 1.
\end{aligned}$$

Donc arcsin est dérivable sur $J \setminus \{-1, +1\} =]-1, 1[$.

3. Pour $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\widetilde{\sin}'(\arcsin(x))} \\
&= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}
\end{aligned}$$

or

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$$

et

$$\forall s \in]-1, 1[,\ \cos(\arcsin(s)) > 0$$

donc

$$\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\widetilde{\sin}(\arcsin(x))\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.
\end{aligned}$$

Exercice 24 :

1. On veut montrer que $\widetilde{\tan} :]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est bijective. La fonction $\widetilde{\tan}$ est définie et dérivable sur $I =]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on a :

$$\widetilde{\tan}'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \widetilde{\tan}^2(x).$$

$$\forall x \in I,\ 1 + \widetilde{\tan}^2(x) > 0.$$

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\widetilde{\tan}'(x)$	||	$+$	||
$\widetilde{\tan}$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction $\widetilde{\tan}$ est strictement croissante sur I, elle est donc bijective de I dans $J = \widetilde{\tan}(I) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

2. D'après le théorème de la bijection réciproque, arctan est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que la dérivée de $\widetilde{\tan}$ ne s'annule pas en $\arctan(x) \in I$. La dérivée de $\widetilde{\tan}$ ne s'annule par sur I donc arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

3. pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\arctan'(x) &= \frac{1}{\widetilde{\tan}'(\arctan(x))} \\ &= \frac{1}{1+\widetilde{\tan}^2(\arctan(x))} \\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Exercice 25 :

1.
$$\cos(x) = 1/2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions sont :
$$\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions sont :
$$\left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$\tan(x) = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou } x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions sont :
$$\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2.
$$\begin{aligned}&\cos(3x+1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow &3x+1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou } 3x+1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow &x = -\frac{\pi+6}{18} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou } x = \frac{\pi-6}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Les solutions sont :
$$\left\{-\frac{\pi+6}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ \frac{\pi-6}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$\begin{aligned}&\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6} - 2x) \\ \Leftrightarrow &x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - 2x + 2k\pi \quad \text{ou } x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow &3x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow &x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Les solutions sont :
$$\left\{-\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$\begin{aligned}
&\sin(2x) = \cos(\frac{\pi}{3} - x)\\
\Leftrightarrow &\cos(\pi - 2x) = \cos(\frac{\pi}{3} - x)\\
\Leftrightarrow &\pi - 2x = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \pi - 2x = -\frac{\pi}{3} + x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow &x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Les solutions sont :

$$\left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$