Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Année universitaire 2015-2016

Site : ☐ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence mathématiques et informatique
Code du module : SMIU1 Libellé du module : Introduction à l'analyse
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (Logique, nombres réels)

On considère l'énoncé (A) suivant : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, si $x > 0$ et $y \geqslant 0$ alors $\exists n \in \mathbb{N}$, $nx \geqslant y$ (cet énoncé exprime une propriété caractéristique des nombres réels appelée *propriété d'Archimède*).

1. Donner la négation de (A).

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls. On considère l'énoncé (B) suivant : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x < \frac{1}{n}$ alors $x = 0$.

2. Écrire la contraposée de (B).
3. En admettant que les nombres réels satisfont la propriété d'Archimède, démontrer (B).

Exercice 2 (Fonctions)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$.

1. Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité, la dérivée et le tableau de variation de la fonction f.
2. Calculer l'image directe de $]-1, 0[$ et l'image réciproque de $[\sqrt{2}, +\infty[$ par f.
3. Donner deux intervalles I_1 et I_2 vérifiant les deux conditions suivantes :
   — la fonction f est injective sur chacun des intervalles I_1 et I_2 ;
   — la réunion de I_1 et I_2 est égale au domaine de définition de f.

Exercice 3 (Intégrales)

Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx$.
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$ (on pourra faire le changement de variable $x = \sin t$).
3. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x} \ln x\, dx$ (faire une intégration par parties).

Exercice 4 (Équations différentielles)

Dans cet exercice toutes les fonctions considérées sont supposées définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Trouver une primitive de la fonction a définie par $a(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$.
2. Résoudre l'équation différentielle homogène $y'(x) - \left(2x - \dfrac{1}{x}\right) y(x) = 0$.
3. Par la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière à l'équation $y'(x) - \left(2x - \dfrac{1}{x}\right) y(x) = 1$.
4. En déduire toutes les solutions de l'équation $y'(x) - \left(2x - \dfrac{1}{x}\right) y(x) = 1$.

Exercice 5 (Équations différentielles du second ordre)

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y''(x) + y'(x) + y(x) = x^2 + x + 1$.