Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licences de mathématiques et informatique
2016-2017

Introduction à l'analyse

Partiel 1 – 21 octobre 2016

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère l'énoncé (A) suivant :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : \ f(x) \geqslant M \ \Rightarrow \ x < 0.$$

a) Donner la négation de (A).

b) Démontrer que (A) est fausse si $f(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Démontrer que (A) est vraie si $f(x) = 1 - x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Démontrer par récurrence pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la formule

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 \ = \ \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

Exercice 3

Soit $f : A \to B$ une application.

a) Donner la définition de l'injectivité de f en utilisant exclusivement des symboles mathématiques.

b) Donner la définition de la surjectivité de f en utilisant exclusivement des symboles mathématiques.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application donnée par

$$f(n) \ = \ \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est un entier pair,} \\ n+1 & \text{si } n \text{ est un entier impair.} \end{cases}$$

a) Est-ce que f est injective ?

b) Est-ce que f est surjective ?

c) Montrer que l'image réciproque de l'ensemble de nombres impairs est égale à l'ensemble $\{n = 4k+2, \ k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 5

Soient

$$A \ = \ \{x \in \mathbb{R}, \ |x-2| \leqslant x\} \quad \text{et} \quad B \ = \ \{x \in \mathbb{R}, \ |x^2 - 2x| > \tfrac{24}{25}\}.$$

Exprimer les ensembles A, B, $A \cup B$ et $A \cap B$ comme réunions d'intervalles.