Introduction à l'analyse

Correction du partiel 1

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère l'énoncé (A) suivant :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \ \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant M \Rightarrow x < 0.$$

1. La négation de (A) s'écrit

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant M \text{ et } x \geqslant 0.$$

2. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = |x|.$$

Montrons que la proposition (A) est fausse, c'est-à-dire que la proposition non(A) est vraie. Soit $M \in \mathbb{R}$. Posons $x = |M|$. On a alors $f(x) = |M| \geqslant M$, et $x \geqslant 0$, ce qui montre que non(A) est vraie.

3. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x.$$

Montrons que la proposition (A) est vraie. Posons $M = 2$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $f(x) \geqslant M$. Alors

$$1 - x \geqslant 2,$$

donc on en déduit que $x \leqslant -1 < 0$. Ceci prouve que la proposition (A) est vraie.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $S_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$ et $R_n = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
On veut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $S_n = R_n$.

Initialisation : $n = 1$: $S_1 = 1$ et $R_1 = 1$ donc $S_1 = R_1$.
Récurrence : soit $n \in \mathbb{N}^\star$; on suppose (hypothèse de récurrence) que $S_n = P_n$ et on veut en déduire que $S_{n+1} = R_{n+1}$. On calcule donc S_{n+1} :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 \\
&= S_n + (2n+1)^2 \\
&= R_n + (2n+1)^2 \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \\
&= (2n+1)\left(\frac{n(2n-1)}{3} + (2n+1)\right) \\
&= (2n+1)\frac{2n^2 - n + 6n + 3}{3} \\
&= \frac{(2n+1)(2n^2+5n+3)}{3}
\end{aligned}$$

puis R_{n+1} :

$$\begin{aligned}
R_{n+1} &= \frac{(n+1)(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} \\
&= \frac{(2n+1)(2n^2+5n+3)}{3}.
\end{aligned}$$

Donc $S_{n+1} = R_{n+1}$. CQFD

Exercice 3

Soit $f : A \longrightarrow B$ une application.

1. Dire que f est injective signifie que

$$\forall x, x' \in A, \text{ si } f(x) = f(x') \text{ alors } x = x'.$$

2. Dire que f est surjective signifie que

$$\forall y \in B, \ \exists x \in A, \ y = f(x).$$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est un entier pair,} \\ n+1 & \text{si } n \text{ est un entier impair.} \end{cases}$$

1. L'application f n'est pas injective. En effet, on a $f(4) = 2 = f(1)$.
2. L'application f est surjective. En effet, si $n \in \mathbb{N}$, l'entier $m = 2n$ est pair, donc on a

$$f(m) = \frac{m}{2} = \frac{2n}{2} = n.$$

3. On note I l'ensemble des nombres impairs et E son image réciproque par f :

$$I = \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$$
$$E = f^{-1}(I) = \{n \in \mathbb{N}, f(n) \in I\} = \{n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, f(n) = 2k+1\}$$

On veut montrer que $E = \{4k+2, k \in \mathbb{N}\}$. On procède par double inclusion.
Tout d'abord montrons que $E \subset \{4k+2, k \in \mathbb{N}\}$. Soit $n \in E$; alors par définition de E l'entier $f(n)$ est impair. On en déduit que n ne peut pas être impair. En effet, si c'était le cas, $f(n) = n+1$ serait pair, ce qui est contraire à notre hypothèse. Ainsi, n est pair et peut s'écrire $n = 2n'$ pour un certain $n' \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on a $f(n) = \frac{n}{2} = \frac{2n'}{2} = n'$ et comme $f(n)$ est impair, n' l'est aussi. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n' = 2k+1$ et on obtient finalement :

$$n = 2n' = 2(2k+1) = 4k+2.$$

Ceci montre que $n \in \{4k+2, k \in \mathbb{N}\}$ et achève la démonstration de la première inclusion.

Montrons maintenant que $\{4k+2, k \in \mathbb{N}\} \subset E$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et posons $n = 4k+2$; alors n est pair et on a ainsi

$$f(n) = f(4k+2) = \frac{4k+2}{2} = 2k+1.$$

Ainsi, $f(n)$ est impair et on a donc $n \in E$. Ces deux inclusions prouvent que

$$E = \{4k+2, k \in \mathbb{N}\}.$$

Exercice 5

Soient les ensembles :

$$A = \{x \in \mathbb{R} / \ |x-2| \leq x\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbb{R} / \ |x^2 - 2x| > \tfrac{24}{25}\}$$

D'une part :

$$\begin{aligned} x \in A \quad & \Leftrightarrow \quad |x-2| \leq x \\ & \Leftrightarrow \quad -x \leq x-2 \leq x \\ & \Leftrightarrow \quad -2x \leq -2 \leq 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x \geq 1 \\ & \Leftrightarrow \quad x \in [1; +\infty[, \end{aligned}$$

donc

$$A = [1; +\infty[.$$

Noter que la seconde équivalence ci-dessus ($|x-2| \leqslant x \Leftrightarrow -x \leqslant x-2 \leqslant x$) utilise le fait que x est positif, ce qui est conséquence de chacune des inégalités.

D'autre part :

$$\begin{aligned} x \in B \quad & \Leftrightarrow \quad |x^2 - 2x| > \frac{24}{25} \\ & \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x > \frac{24}{25} \text{ ou } x^2 - 2x < -\frac{24}{25} \\ & \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - \frac{24}{25} > 0 \text{ ou } x^2 - 2x + \frac{24}{25} < 0. \end{aligned}$$

Pour résoudre les inéquations ci-dessus, il faut calculer les racines de chacun des polynômes du second degré en utlisant le discriminant.

$$x^2 - 2x - \frac{24}{25}$$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{196}{25} = \left(\frac{14}{5}\right)^2$.
Les racines du polynôme sont donc :
$x_1 = \frac{2-\frac{14}{5}}{2} = -\frac{2}{5}$ et $x_2 = \frac{2+\frac{14}{5}}{2} = \frac{12}{5}$ et on a :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$\frac{12}{5}$		$+\infty$
$x^2 - 2x - \frac{24}{25}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc
$x^2 - 2x - \frac{24}{25} > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; -\frac{2}{5}\right[\cup \left]\frac{12}{5}; +\infty\right[$.

$$x^2 - 2x + \frac{24}{25}$$

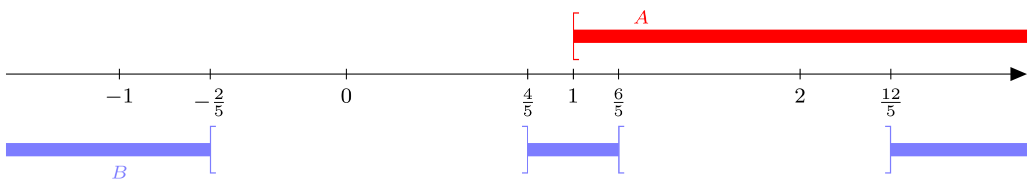
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times \frac{24}{25} = \frac{4}{25} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$.
Les racines du polynôme sont donc
$x_1 = \frac{2-\frac{2}{5}}{2} = \frac{4}{5}$ et $x_2 = \frac{2+\frac{2}{5}}{2} = \frac{6}{5}$ et on a :

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$x^2 - 2x + \frac{24}{25}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc
$x^2 - 2x + \frac{24}{25} < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{4}{5} \,;\, \frac{6}{5}\right[$.

Finalement,

$$B = \left]-\infty \,;\, -\frac{2}{5}\right[\cup \left]\frac{4}{5} \,;\, \frac{6}{5}\right[\cup \left]\frac{12}{5} \,;\, +\infty\right[.$$



La représentation graphique ci-dessus, nous donne :

$$A \cap B = \left[1 \,;\, \frac{6}{5}\right[\cup \left]\frac{12}{5} \,;\, +\infty\right[\qquad \text{et} \qquad A \cup B = \left]-\infty \,;\, -\frac{2}{5}\right[\cup \left]\frac{4}{5} \,;\, +\infty\right[.$$