Aix-Marseille Université 2016-2017

Introduction en Analyse

Partiel 2 - 2 décembre 2016
Durée : 2 heures. Sans documents ni calculatrices

Exercice 1

Soient u et f deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f et u' la fonction dérivée de u.

1. Donner la dérivée de la fonction $f \circ u$. On rappelle que $f \circ u(x) = f\big(u(x)\big)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

2. Donner la primitive $F(x)$ de la fonction $v(x) = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+21}}$ telle que $F(0) = 0$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2(x)}$.

1. Donner le domaine de définition de f et justifier qu'elle est intégrable sur $[0; \pi/4]$.

2. Montrer qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ est $x \mapsto -\ln(\cos(x))$ sur $[0; \pi/4]$.

3. Montrer que la dérivée de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

4. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)} dx$.

5. A l'aide de la question (3) donner une primitive de la fonction $g(x) = \dfrac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}$.

6. En déduire l'aire du plan délimitée par le graphe de g, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = \pi/4$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\pi}{1+e^x}$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f (en termes d'intervalles).

2. Donner les limites de f aux bornes de D_f.

3. Justifier le domaine sur lequel f est dérivable, puis calculer sa dérivée.

4. Etablir le tableau des variations de f.

5. Donner l'ensemble $f(D_f)$ (en termes d'intervalles).

Exercice 4

On considère la fonction $g\ :[\frac{1}{4};1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos(\pi\sqrt{x})$.

1. Justifier que g est dérivable sur $[\frac{1}{4};1]$, puis calculer sa dérivée.

2. Etablir le tableau des variations de g.

3. Soit $f\ :[\frac{1}{4};1] \to I$ définie par $f(x) = g(x)$ (pour tout $x \in [\frac{1}{4};1]$).
Donner un intervalle I tel que f soit bijective.

4. Donner l'application réciproque de f.