Université d'Aix-Marseille | Licences de mathématiques et informatique
Semestre 1 | 2016-2017

Introduction à l'analyse

Partiel 2 – 2 décembre 2016

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1

Soient u et f deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f et u' la fonction dérivée de u.

1. Donner la dérivée de la fonction $f \circ u$. On rappelle que $f \circ u(x) = f\big(u(x)\big)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Réponse.

$$(f \circ u)'(x) = f'(u(x)).u'(x)$$

2. Donner la primitive $F(x)$ de la fonction $v(x) = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+21}}$ telle que $F(0) = 0$.

Réponse. Comme $x^4 + 21 \geqslant 21$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^4+21}$ est définie, continue et non nulle sur $\mathbb{R}$, la fonction v est également continue sur $\mathbb{R}$ et par conséquent admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

On remarque que x^3 est quasiment (à un coefficient multiplicatif près) la dérivée de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^4+21$; la fonction v peut donc s'écrire $v = \dfrac{ku'}{2\sqrt{u}} = k(\sqrt{u})'$ où k est un coefficient multiplicatif à déterminer. En remplaçant $u(x)$ par sa valeur dans cette égalité, et comme $u'(x) = 4x^3$, on obtient $v(x) = k\dfrac{4x^3}{2\sqrt{x^4+21}} = k\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+21}}$, d'où l'on déduit par définition de v que $k = 1$.

On a donc $v = (\sqrt{u})'$, les primitives de v sont donc de la forme $F(x) = \sqrt{x^4+21}+C$ où C est une constante additive ; mais on veut que $F(0) = 0$, c'est à dire $\sqrt{0^4+21}+C = 0$ d'où l'on déduit $C = -\sqrt{21}$; finalement la primitive cherchée est :

$$F(x) = \sqrt{x^4+21} - \sqrt{21}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2(x)}$.

1. Donner le domaine de définition de f et justifier qu'elle est intégrable sur $[0, \pi/4]$.

Réponse. La fonction f est définie comme une fraction de deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$; elle est donc définie et continue en tout point x tel que son dénominateur $\cos^2(x)$ est non nul, donc tel que $x \neq \pi/2 \mod \pi$. Le domaine de définition et de continuité de f est donc :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \big\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\big\} = \cdots \cup \big]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\big[\cup \big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big[\cup \big]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\big[\cup \cdots$$

Or l'intervalle $[0, \pi/4]$ est inclus dans D_f ; la fonction f est donc continue et par conséquent intégrable sur $[0, \pi/4]$.

2. Montrer qu'une primitive de la fonction tan est $x \mapsto -\ln(\cos(x))$ sur $[0, \pi/4]$.

Réponse. Comme $\cos(x)$ est strictement posifif pour tout $x \in [0, \pi/4]$, la fonction $x \mapsto -\ln(\cos(x))$ est définie, continue et dérivable de dérivée continue sur $[0, \pi/4]$. Il suffit donc de vérifier que cette dérivée est $\tan(x)$; on remarque que $-\ln(\cos(x)) = -(\ln \circ \cos)(x)$ et on applique la formule de dérivation d'une fonction composée (cf. exo précédent) :

$$\begin{aligned}
-(\ln \circ \cos)'(x)) &= -\ln'(\cos(x)).\cos'(x) \\
&= -\frac{1}{\cos(x)}.(-\sin(x)) \\
&= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)
\end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat voulu.

3. Montrer que la dérivée de la fonction $\tan(x)$ est la fonction $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Réponse. On applique la formule de dérivation d'une fraction à $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$:

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \frac{\sin'(x).\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)} dx$.

Réponse. Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[0, \pi/4]$ vérifiant :

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} & \qquad u(x) &= \tan(x) \\
v(x) &= x & \qquad v'(x) &= 1
\end{aligned}$$

de façon à ce que $\dfrac{x}{\cos^2(x)} = u'(x)v(x)$. La formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} u(x)v'(x)dx$$

nous donne alors :

$$\begin{aligned}
I &= [x\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx \\
&= \frac{\pi}{4}.\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + [\ln(\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} & \qquad \text{grâce à la question 2.} \\
&= \frac{\pi}{4} + \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \ln(\cos(0)) \\
&= \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) - \ln(1) \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.\ln(2)
\end{aligned}$$

5. À l'aide de la question (3) donner une primitive de la fonction $g(x) = \dfrac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}$.

Réponse. La fonction g est définie et continue sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ donc elle admet une primitive sur cet intervalle.
On sait que $\frac{1}{\cos^2(x)}$ est la dérivée de $\tan(x)$; la fonction g est donc de la forme $u'e^u$ où u est la fonction définie par $u(x) = \tan(x)$. Les primitives de g sont donc de la forme $e^u + C$ où C est une constante additive. Donc une primitive de g sur $]-\pi/2, \pi/2[$ est :

$$G(x) = e^{\tan(x)}$$

6. En déduire l'aire du plan délimitée par la courbe de g, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = \pi/4$.

Réponse. L'aire A du plan définie dans la question est donnée par l'intégrale

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx$$

Comme on vient de voir que G est une primitive de g, on obtient donc :

$$A = [G(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = e^{\tan(\frac{\pi}{4})} - e^{\tan(0)} = e^1 - e^0 = e - 1$$

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\pi}{1 + e^x}$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f.

Réponse. Comme $e^x > 0$, $1 + e^x > 1$ pour tout x dans $\mathbb{R}$; le dénominateur ne s'annulant jamais la fonction f est définie (et continue, et dérivable) en tout x réel :

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

2. Donner les limites de f aux bornes de D_f.

Réponse.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi}{1+e^x} = \pi \qquad \text{car} \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{1+e^x} = 0 \qquad \text{car} \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

3. Justifier le domaine sur lequel f est dérivable, puis calculer sa dérivée.

Réponse. f est une fractions de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; de plus la dérivée du dénominateur est e^x qui ne s'annule jamais ; f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

On applique la formule de dérivation $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$:

$$f'(x) = \frac{-\pi.e^x}{(1+e^x)^2}$$

4. Établir le tableau des variations de f.

Réponse. La dérivée de f est clairement strictement négative en tout point x de $\mathbb{R}$; la fonction f est donc strictement décroissante de π vers 0 (ses deux valeurs extrêmes), d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\pi \searrow 0$

5. Donner l'ensemble $f(D_f)$.

Réponse. La réponse se lit sur le tableau de variation ci-dessus : $f(D_f) =]0,\pi[$; comme la fonction f est continue et strictement monotone, l'image directe de son domaine, l'intervalle $]-\infty,+\infty[$, est l'intervalle délimité par les limites des bornes de D_f.

Exercice 4

On considère la fonction $g : \left[\frac{1}{4}, 1\right] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos(\pi\sqrt{x})$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$, puis calculer sa dérivée.

Réponse. La fonction g s'écrit $\cos\circ u$, composée de la fonction u définie par $u(x) = \pi\sqrt{x}$, définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et de la fonction cos, définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par les théorèmes de continuité et de dérivabilité des fonctions composées elle est donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme l'intervalle $[1/4, 1]$ est inclus dans dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction g est en particulier définie, continue et dérivable sur $[1/4, 1]$.
Sa dérivée s'obtient en appliquant la formule de dérivation d'une composition :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos'(u(x)).u'(x) \\ &= -\sin(\pi\sqrt{x}).\frac{\pi}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-\pi\sin(\pi\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2. Établir le tableau des variations de g.

Réponse. Lorsque x varie de $1/4$ à 1, $\pi\sqrt{x}$ varie de $\pi/2$ à π ; sur cet intervalle la fonction sin est strictement décroissante et s'annule en π, elle est donc toujours positive. Par conséquent sur l'intervalle $[1/4, 1]$, $g'(x)$ est négative (nulle en 1), g est donc strictement décroissante et ses valeurs aux bornes sont $g(1/4) = \cos(\pi\sqrt{1/4}) = \cos(\pi/2) = 0$, $g(1) = \cos(\pi\sqrt{1}) = \cos(\pi) = -1$. D'où le tableau de variation :

x	$\frac{1}{4}$ $\qquad$ 1
$g'(x)$	$-$ $\qquad$ 0
$g(x)$	$0 \searrow -1$

3. Soit $f : \left[\frac{1}{4}, 1\right] \to I$ définie par $f(x) = g(x)$ (pour tout $x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$).
Donner un intervalle I tel que f soit bijective.

Réponse. Comme g est strictement monotone elle est injective, donc f aussi. Pour que f soit bijective il faut donc qu'elle soit surjective, c'est-à-dire que $I = f([1/4, 1])$. Donc il faut prendre $I = [-1, 0]$.

4. Donner l'application réciproque de f.

Réponse. Comme f est bijective de $[1/4, 1]$ sur $[-1, 0]$ elle admet une application réciproque $f^{-1} : [-1, 0] \to [1/4, 1]$. Soit $y \in [-1, 0]$; on cherche $x = f^{-1}(y)$, c'est-à-dire $x \in [1/4, 1]$ tel que $f(x) = y$:

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ \cos(\pi\sqrt{x}) &= y \\ \pi\sqrt{x} &= \arccos(y) && \text{car } \pi\sqrt{x} \in [\pi/2, \pi] \text{ et } \cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \text{ est bijective de réciproque arccos} \\ \pi^2 x &= (\arccos(y))^2 \\ x &= \frac{(\arccos(y))^2}{\pi^2} \end{aligned}$$

La fonction réciproque est donc donnée par :

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-1, 0] &\to [1, 1/4] \\ y &\mapsto \frac{(\arccos(y))^2}{\pi^2} \end{aligned}$$