Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Année universitaire 2016/2017

Site : ☒ Luminy ☒ St Charles ☐ St Jérôme ☐ Cht Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet session de : ☒ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h

Examen de : ☒ L1/☐ L2/☐ L3 - ☐ M1/☐ M2 - ☐ LP - ☐ DU Nom diplôme : Licence MI

Code Apogée du module : SMI1U1T Libellé du module : Introduction à l'analyse

Document autorisé : ☐OUI - ☒NON Calculatrice autorisée : ☐OUI - ☒NON

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (Injectivité, surjectivité)

On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2 + 2n + 3. \end{array}$$

1. Est-ce que f est injective ?
2. Est-ce que f est surjective ?
3. Calculer $f^{-1}(\{18\})$.

Exercice 2 (Fonction)

On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2}\right). \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Déterminer les limites aux bornes de D_f.
3. Déterminer l'ensemble de dérivation de f.
4. On se propose de calculer la dérivée f' de f.
   (a) Soit u la fonction définie par $u(x) = \dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2}$. Calculer $u'(x)$.
   (b) En déduire une expression de $f'(x)$.

5. On se propose d'étudier le signe de $f'(x)$.
   (a) Montrer que
   $$f'(x) = \frac{e^x[(e^x+1)(e^x-5)]}{(e^x-2)(e^{2x}+5)}.$$
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$.
   (c) Établir le tableau des variations de f.

Exercice 3 (Intégrale, équation différentielle)

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer une primitive de la fonction
$$x \mapsto \frac{1}{x^2}\ln\left(1+x^2\right).$$
2. On considère l'équation différentielle sur l'intervalle $]0,+\infty[$
$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = \ln\left(1+x^2\right). \qquad (E_1)$$
   (a) Donner les solutions de l'équation homogène associée à (E_1).
   (b) En utilisant la méthode de la variation de la constante (ou méthode de Lagrange), trouver une solution particulière de (E_1).
   (c) En déduire toutes les solutions de (E_1).

Exercice 4 (Équation différentielle du second ordre)

On considère l'équation différentielle
$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = -7e^{-3x}. \qquad (E_2)$$

1. Donner les solutions de l'équation homogène associée à (E_2).
2. Trouver un nombre réel k tel que $y : x \mapsto kxe^{-3x}$ soit une solution particulière de l'équation (E_2).