Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Année universitaire 2016/2017

Site : ☒ Luminy ☒ St Charles ☐ St Jérôme ☐ Cht Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet session de : ☒ 1$^{\text{er}}$ semestre ☐ 2$^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h

Examen de : ☒ L1/☐ L2/☐ L3 - ☐ M1/☐ M2 - ☐ LP - ☐ DU Nom diplôme : Licence MI

Code Apogée du module : SMI1U1T Libellé du module : Introduction à l'analyse

Document autorisé : ☐OUI - ☒NON Calculatrice autorisée : ☐OUI - ☒NON

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (Injectivité, surjectivité)

On considère la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n^2 + 2n + 3. \end{aligned}$$

1. Est-ce que f est injective ?

Réponse. On cherche deux entiers naturels n et p tels que $f(n) = f(p)$:

$$\begin{aligned} f(n) = f(p) &\text{ ssi } n^2 + 2n + 3 = p^2 + 2p + 3 \\ &\text{ ssi } n^2 - p^2 + 2n - 2p = 0 \\ &\text{ ssi } (n-p)(n+p) + 2(n-p) = 0 \\ &\text{ ssi } (n-p)(n+p+2) = 0 \\ &\text{ ssi } n - p = 0 \text{ ou } n + p + 2 = 0 \end{aligned}$$

Mais comme n et p sont des entiers positifs, $n + p + 2 = 0$ n'a pas de solution. Par conséquent on a montré que $f(n) = f(p)$ ssi $n = p$, donc que f est injective. □

2. Est-ce que f est surjective ?

Réponse. Clairement non : par exemple on voit que $f(n) \geqslant 3$ pour tout entier positif n ; en effet $n \geqslant 0$ donc $2n \geqslant 0$ et comme par ailleurs $n^2 \geqslant 0$, on a finalement $f(n) \geqslant 3$. Par conséquent il n'existe aucun entier naturel n tel que $f(n) = 0$, ou $f(n) = 1$ ou $f(n) = 2$. □

3. Calculer $f^{-1}(\{18\})$.

Réponse. Par définition $f^{-1}(\{18\}) = \{n \in \mathbb{N},\ f(n) \in \{18\}\} = \{n \in \mathbb{N},\ f(n) = 18\}$. Il s'agit donc de résoudre l'équation $f(n) = 18$, soit $n^2 + 2n + 3 = 18$, ou encore $n^2 + 2n - 15 = 0$.
On voit que $n = 3$ est solution, et comme f est injective, c'est la seule solution. Par conséquent $f^{-1}(\{18\}) = \{3\}$. □

Exercice 2 (Fonction)

On considère la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^x-2}\right). \end{aligned}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

   Réponse. Pour que $f(x)$ soit défini il faut que $e^x - 2 \neq 0$ (le dénominateur de la fraction doit être non nul) et $\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2} > 0$ (le logarithme n'est défini que sur les réels strictements positifs). La première condition revient à $x \neq \ln 2$. Comme le numérateur de la fraction est toujours strictement positif (et même plus grand que 5), c'est le dénominateur qui détermine le signe et comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on voit que $e^x - 2 > 0$ ssi $x > \ln 2$. On en déduit donc que $D_f = \,]\ln 2, +\infty[$. □

2. Déterminer les limites aux bornes de D_f.

   Réponse. Quand $x \longrightarrow \ln 2^+$ (x tend vers $\ln 2$ par valeurs positives) on a :

$$\begin{aligned} e^{2x}+5 &\longrightarrow e^{2\ln 2}+5 = 9, \\ e^x - 2 &\longrightarrow 0^+, && \text{donc} \\ \frac{e^{2x}+5}{e^x-2} &\longrightarrow +\infty && \text{et donc} \\ \ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^x-2}\right) &\longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

   On a :

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x}+5}{e^x-2} &= \frac{e^{2x}(1+5e^{-2x})}{e^x(1-2e^{-x})} \\ &= e^x \cdot \frac{1+5e^{-2x}}{1-2e^{-x}} \end{aligned}$$

   Quand $x \longrightarrow +\infty$ le numérateur et le dénominateur de la dernière fraction tendent vers 1 (car $e^{-ax} \longrightarrow 0$ quand a est positif) et comme e^x tend vers l'infini on en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x}+5}{e^x-2} &\longrightarrow +\infty && \text{donc} \\ \ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^x-2}\right) &\longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

   □

3. Déterminer l'ensemble de dérivation de f.

   Réponse. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$; la fraction $\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2}$ est dérivable en tout x où le dénominateur est non nul ; elle est donc dérivable sur D_f et comme elle est strictement positive sur D_f et comme la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est dérivable sur D_f ; autrement dit $D_{f'} = D_f$. □

4. On se propose de calculer la dérivée f' de f.

   (a) Soit u la fonction définie par $u(x) = \dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2}$. Calculer $u'(x)$.

RÉPONSE. On applique la formule de dérivation d'une fraction : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-g'f}{g^2}$; on a donc :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{2e^{2x}(e^x-2)-(e^{2x}+5)e^x}{(e^x-2)^2} \\ &= \frac{e^{3x}-4e^{2x}-5e^x}{(e^x-2)^2} \end{aligned}$$

$\square$

(b) En déduire une expression de $f'(x)$.

RÉPONSE. On a $f(x) = \ln(u(x))$ par conséquent $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\dfrac{e^{3x}-4e^{2x}-5e^x}{(e^x-2)^2}}{\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2}} \\ &= \frac{e^{3x}-4e^{2x}-5e^x}{(e^x-2)^2} \cdot \frac{e^x-2}{e^{2x}+5} \\ &= \frac{e^{3x}-4e^{2x}-5e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+5)} \end{aligned}$$

$\square$

5. On se propose d'étudier le signe de $f'(x)$.

(a) Montrer que
$$f'(x) = \frac{e^x[(e^x+1)(e^x-5)]}{(e^x-2)(e^{2x}+5)}.$$

RÉPONSE. Posons $X = e^x$; le numérateur de la fraction $f'(x)$ est de la forme X^3-4X^2-5X ce qui se factorise en $X(X^2-4X-5)$; on voit que -1 est racine évidente du polynôme du second degré, ce qui nous permet de factoriser encore et d'obtenir finalement $X^3-4X^2-5X = X(X+1)(X-5)$; en remplaçant dans $f'(x)$, on a le résultat demandé :
$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)(e^x-5)}{(e^x-2)(e^{2x}+5)}$$

$\square$

(b) En déduire le signe de $f'(x)$.

RÉPONSE. Les facteurs e^x, (e^x+1) et $e^{2x}+5$ sont strictement positifs ; le signe de $f'(x)$ est donc le même que celui de $\dfrac{e^x-5}{e^x-2}$, positive lorsque le numérateur et le dénominateur sont de même signe, négative sinon. Donc $f'(x) < 0$ lorsque $\ln 2 < x < \ln 5$ et $f'(x) > 0$ lorsque $x > \ln 5$. $\square$

(c) Établir le tableau des variations de f.

RÉPONSE.

x	$\ln 2$		$\ln 5$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 10$	$\nearrow$	$+\infty$

$\square$

Exercice 3 (Intégrale, équation différentielle)

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer une primitive de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^2}\ln\left(1+x^2\right).$$

Réponse. Cette fonction n'est pas définie en 0, vu les questions suivantes on va se contenter de chercher une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème fondamental, une primitive est donnée par l'intégrale : $\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln(1+t^2)dt$. On pose $u'(t)=\frac{1}{t^2}$, dont une primitive est $u(t)=-\frac{1}{t}$. On pose $v(t)=\ln(1+t^2)$ d'où $v'(t)=\frac{2t}{1+t^2}$. Par la formule d'intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln(1+t^2)dt &= \left[\frac{-1}{t}\ln(1+t^2)\right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{t}\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt\\ &= \ln 2 - \frac{\ln(1+x^2)}{x} + 2\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt\\ &= \ln 2 - \frac{\ln(1+x^2)}{x} + 2\left[\arctan(t)\right]_1^x\\ &= \ln 2 - \frac{\ln(1+x^2)}{x} + 2\arctan(x) - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

On peut oublier les constantes additives, ce qui nous donne comme primitive :

$$F(x) = 2\arctan(x) - \ln(1+x^2)$$

□

2. On considère l'équation différentielle sur l'intervalle $]0,+\infty[$

$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = \ln\left(1+x^2\right). \qquad (E_1)$$

(a) Donner les solutions de l'équation homogène associée à (E_1).

Réponse. L'équation homogène associée est : $y'(x)-\frac{2}{x}y(x)=0$. On sait que les solutions de l'équation $y'-ay=0$ sont de la forme Ke^A où K est une constante, et A est une primitive de a. Ici le coefficient est la fonction $a(x)=\frac{2}{x}$ dont une primitive (sur $\mathbb{R}_+^*$) est la fonction $x\mapsto 2\ln x$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme : $y(x)=Ke^{2\ln x}=Kx^2$, où K est une constante réelle. □

(b) En utilisant la méthode de la variation de la constante (ou méthode de Lagrange), trouver une solution particulière de (E_1).

Réponse. On pose $y(x)=K(x)x^2$ où K est une fonction, supposée dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, à déterminer. On a alors $y'(x)=K'(x)x^2+2xK(x)$. Par conséquent $y'(x)-\frac{2}{x}y(x)=K'(x)x^2+2xK(x)-\frac{2}{x}K(x)x^2=K'(x)x^2$. Si y est solution de (E_1) on doit avoir $K'(x)x^2=\ln(1+x^2)$, donc $K'(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$. D'après la première question on peut prendre $K(x)=2\arctan(x)-\ln(1+x^2)$ ce qui nous donne la solution particulière :

$$y(x) = (2\arctan(x) - \ln(1+x^2))x^2$$

□

(c) En déduire toutes les solutions de (E_1).

Réponse. On sait que les solutions sont de la forme « solution générale de l'équation homogène » + « solution particulière ». On obtient donc l'expression générale des solutions de (E_1) :

$$y(x) = (2\arctan(x) - \ln(1+x^2))x^2 + Kx^2 = (2\arctan(x) - \ln(1+x^2) + K)x^2$$

où K est une constante réelle. □

Exercice 4 (Équation différentielle du second ordre)

On considère l'équation différentielle

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = -7e^{-3x}. \qquad (E_2)$$

1. Donner les solutions de l'équation homogène associée à (E_2).

Réponse. L'équation homogène associée est $y'' + 2y' - 3y = 0$ dont le polynôme caractéristique est $x^2 + 2x - 3$; celui-ci admet 1 comme racine évidente ce qui permet de le factoriser : $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$. Il y a deux racines réelles distinctes 1 et -3, les solutions de l'équations homogènes sont donc de la forme :

$$y(x) = ae^{x} + be^{-3x}$$

où a et b sont des constantes réelles. □

2. Trouver un nombre réel k tel que $y : x \mapsto kxe^{-3x}$ soit une solution particulière de l'équation (E_2).

Réponse. Posons $y(x) = kxe^{-3x}$; alors $y'(x) = ke^{-3x} - 3kxe^{-3x}$ et $y''(x) = -3ke^{-3x} - 3ke^{-3x} + 9kxe^{-3x} = -6ke^{-3x} + 9kxe^{-3x}$. Donc :

$$\begin{aligned} y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) &= -6ke^{-3x} + 9kxe^{-3x} + 2(ke^{-3x} - 3kxe^{-3x}) - 3kxe^{-3x} \\ &= e^{-3x}(-6k + 9kx + 2k - 6kx - 3kx) \\ &= -4ke^{-3x} \end{aligned}$$

Pour que y soit solution de (E_2) il faut donc prendre $k = \dfrac{7}{4}$.

□