Introduction à l'analyse

Partiel 1 – 20 octobre 2017

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1

On considère l'assertion (P)

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : (a \neq -1 \wedge b \neq -1) \Rightarrow a + b + ab \neq -1.$$

1. Écrire la négation de (P).
2. Écrire la contraposée de (P).
3. Montrer que (P) est vraie.

(On pourrait utiliser sa contraposée et remplacer $a + b + ab + 1$ par une forme factorisée.)

Exercice 2

Soit $n > 1$ un entier naturel ; on considère la formule :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

1. Réécrire cette formule en utilisant le signe $\sum$ et sans points de suspension.
2. Démontrer cette formule par récurrence sur n.

Exercice 3

Soit $f : A \to B$ une application et soit $U \subset B$.
1. Rappeler la définition de l'image réciproque $f^{-1}(U)$ de U.
2. Donner $f^{-1}(U)$ dans le cas $f = \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ et $U =]\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice 4

1. Donner la définition d'injectivité d'une application.

Soient $f : A \to B$, $g : B \to C$ des applications.

2. Montrer que
$$f, g \text{ injectives} \Rightarrow g \circ f \text{ injective.}$$

3. Montrer que
$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective.}$$

4. Donner un exemple d'application $f : A \to B$, $g : B \to C$ telles que $g \circ f$ est injective, mais g ne l'est pas.

Exercice 5

Soient
$$A = \{x \in \mathbb{R}, |2x| \leqslant x + 3\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbb{R}, |x^2 - 5x| < 6\}.$$

Exprimer les ensembles A, B, $A \cup B$ et $A \cap B$ comme réunions d'intervalles.