Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licences de mathématiques et informatique
2017-2018

Introduction à l'analyse

Partiel 1 – 20 octobre 2017

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1

On considère l'assertion (P)

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : (a \neq -1 \wedge b \neq -1) \Rightarrow a + b + ab \neq -1.$$

1. Écrire la négation de (P).

   Réponse.
$$\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : (a \neq -1 \wedge b \neq -1) \wedge a + b + ab = -1.$$

2. Écrire la contraposée de (P).

   Réponse.
$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a + b + ab = -1 \Rightarrow (a = -1 \vee b = -1).$$

3. Montrer que (P) est vraie.

   Réponse. Le plus simple est de montrer la contraposée de (P). Soit donc a et b deux réels quelconques ; on suppose que $a + b + ab = -1$ et l'on veut en déduire que l'un des deux est égal à -1.

   De $a + b + ab = -1$ on déduit $a + b + ab + 1 = 0$ en ajoutant 1 à chaque membre de l'équation. On peut faire le petit calcul suivant :

$$\begin{aligned} a + b + ab + 1 &= ab + a + b + 1 && \text{par commutativité de l'addition} \\ &= a(b + 1) + b + 1 && \text{en factorisant les 2 premiers termes par } a \\ &= (a + 1)(b + 1) && \text{en factorisant par } b + 1 \end{aligned}$$

   Par conséquent notre équation est équivalente à : $(a + 1)(b + 1) = 0$. Or un produit est nul ssi l'un de ses facteurs est nul, on en déduit que $a + 1 = 0$ ou $b + 1 = 0$, c'est-à-dire $a = -1$ ou $b = -1$. □

Exercice 2

Soit $n > 1$ un entier naturel ; on considère la formule :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

1. Réécrire cette formule en utilisant le signe $\sum$ et sans points de suspension.

   Réponse. On voit que tous les termes du membre gauche sont de la forme $\frac{1}{(k-1).k}$ pour des valeurs entières de k allant de $k = 2$ à $k = n$. On peut donc écrire :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1).k} = 1 - \frac{1}{n}.$$

   On peut aussi dire que les termes du membres gauche sont de la forme $\frac{1}{k.(k+1)}$ où k varie cette fois de 2 à $n - 1$; auquel cas on écrit la formule :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k.(k+1)} = 1 - \frac{1}{n}.$$

2. Démontrer cette formule par récurrence sur n.

   Réponse.

   Cas de base : $n = 2$. Il faut montrer que $\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{(k-1).k} = 1 - \frac{1}{2}$. Le membre gauche est une somme d'un seul terme, celui pour $k = 2$, et est donc égal à $\frac{1}{(2-1).1} = \frac{1}{2}$ ce qui est bien la valeur du membre droit.

Récurrence. On suppose, c'est l'hypothèse de récurrence, que la propriété est vraie au rang $n > 1$ c'est-à-dire que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1).k} = 1 - \frac{1}{n},$$

et on montre qu'elle est également vraie au rang $n+1$ c'est-à-dire que :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1).k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Pour cela on calcule le membre gauche :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1).k} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1).k} + \frac{1}{n.(n+1)} && \text{en sortant le dernier terme de la somme}\\
&= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n.(n+1)} && \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= 1 - \frac{n+1}{n.(n+1)} + \frac{1}{n.(n+1)}\\
&= 1 - \frac{n+1-1}{n.(n+1)}\\
&= 1 - \frac{n}{n.(n+1)}\\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

□

Exercice 3

Soit $f : A \to B$ une application et soit $U \subset B$.

1. Rappeler la définition de l'image réciproque $f^{-1}(U)$ de U.

   Réponse. L'image réciproque de U par f est l'ensemble des éléments de A qui sont antécédents des éléments de U, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de A dont l'image par f est dans U ; écrit mathématiquement :

$$f^{-1}(U) = \{x \in A,\ f(x) \in U\}.$$

   Autrement dit, pour $x \in A$: $x \in f^{-1}(U)$ ssi $f(x) \in U$.

2. Donner $f^{-1}(U)$ dans le cas $f = \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ et $U =]\frac{1}{2}, 1]$.

   Réponse. Par définition de l'image réciproque on a :

$$f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in U\} = \{x \in \mathbb{R},\ \cos(x) \in]\tfrac{1}{2}, 1]\} = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in U\} = \{x \in \mathbb{R},\ \tfrac{1}{2} < \cos(x) \leqslant 1\}$$

   Il s'agit donc de trouver les réels x tels que $\frac{1}{2} < \cos x \leqslant 1$; or la seconde inéquation est toujours réalisée, donc il s'agit uniquement de résoudre la première : $\frac{1}{2} < \cos x$.
   Comme la fonction cos est périodique de période 2π il suffit de trouver les solutions pour $x \in [-\pi, \pi]$. On sait que $\cos x = \frac{1}{2}$ quand $x = \pm\pi/3$; on en déduit que, pour $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $\cos(x) > 1/2$ ssi $-\pi/3 < x < \pi/3$. Par périodicité de cos cette propriété est invariante quand x est translaté d'un multiple de 2π, c'est-à-dire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1/2 < \cos(x)$ ssi il existe un entier (relatif) k tel que $-\pi/3 + 2k\pi < x < \pi/3 + 2k\pi$. Finalement la solution demandée s'écrit :

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{(6k-1)\pi}{3}, \frac{(6k+1)\pi}{3}\right[$$

Exercice 4

1. Donner la définition d'injectivité d'une application.

   Réponse. Une application $h : X \to Y$ est injective si tout élément de Y a au plus un antécédent par f, autrement dit deux éléments distincts de X ont des images distinctes par f. Ce que l'on peut écrire :

$$\forall x, x' \in X, \text{ si } x \neq x' \text{ alors } h(x) \neq h(x')$$

   ou par contraposition :

$$\forall x, x' \in X, \text{ si } h(x) = h(x') \text{ alors } x = x'.$$

Soient $f : A \to B$, $g : B \to C$ des applications.

2. Montrer que

$$f, g \text{ injectives} \Rightarrow g \circ f \text{ injective}.$$

Réponse. On suppose que f et g sont injectives. Pour montrer que $g \circ f$ est injective il faut montrer que :

$$\forall a, a' \in A, \text{ si } g \circ f(a) = g \circ f(a') \text{ alors } a = a'.$$

Supposons donc que a et a' sont deux éléments de A tels que $g \circ f(a) = g \circ f(a')$. Par définition de la composition des applications cela signifie que $g(f(a)) = g(f(a'))$. Les éléments $f(a)$ et $f(a')$ de B ont donc la même image par g et comme g est supposée injective on en déduit que $f(a) = f(a')$; mais f est aussi supposée injective ce qui nous donne donc $a = a'$ comme attendu. $\square$

3. Montrer que
$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective}.$$

Réponse. On suppose cette que fois que $g \circ f$ est injective, et l'on veut montrer que f est alors injective, c'est-à-dire que :

$$\forall a, a' \in A, \text{ si } f(a) = f(a') \text{ alors } a = a'.$$

Soit donc a, a' deux éléments de a vérifiant $f(a) = f(a')$. En appliquant g à chaque membre de cette équation on obtient $g(f(a)) = g(f(a')$, c'est-à-dire par définition de la composition des applications : $g \circ f(a) = g \circ f(a')$. Mais $g \circ f$ est supposée injective, on en déduit donc que $a = a'$. $\square$

4. Donner un exemple d'application $f : A \to B$, $g : B \to C$ telles que $g \circ f$ est injective, mais g ne l'est pas.

Réponse. Un exemple simple (pas tout à fait le plus simple mais presque) est :

$$\begin{aligned} f : \{0\} &\to \{0, 1\} \\ 0 &\to 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \{0, 1\} &\to \mathbb{N} \\ 0, 1 &\to 0 \end{aligned}$$

Ainsi la composée est :

$$\begin{aligned} g \circ f : \{0\} &\to \mathbb{N} \\ 0 &\to 0 \end{aligned}$$

L'application $g \circ f$ est clairement injective puisque son domaine, réduit au seul élément 0, ne peut pas contenir deux éléments distincts ayant la même image. Par contre l'application g n'est pas injective puisque les 2 éléments de son domaine ont la même image.
On peut également prendre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$ et $g : \mathbb{R} \to R$ définie par $g(x) = x^2$. La fonction g n'est pas surjective puisque par exemple $g(-1) = g(1) = 1$, par contre comme $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(e^x) = (e^x)^2 = e^{2x}$ on voit que $g \circ f$ est injective : si $e^{2x} = e^{2x'}$ alors en appliquant le logarithme aux deux membres de l'équations on obtient $2x = 2x'$ d'où $x = x'$.

Exercice 5

Soient
$$A = \{x \in \mathbb{R}, \ |2x| \leqslant x + 3\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbb{R}, \ |x^2 - 5x| < 6\}.$$

Exprimer les ensembles A, B, $A \cup B$ et $A \cap B$ comme réunions d'intervalles.

Réponse. Pour calculer A et B on utilise la propriété fondamentale de la valeur absolue : $|P| \leqslant Q$ ssi $-Q \leqslant P \leqslant Q$ (et pareillement avec des inégalités strictes).

Calcul de A. Il s'agit de résoudre l'inégalité $|2x| \leqslant x + 3$ qui est donc équivalente à l'encadrement : $-x - 3 \leqslant 2x \leqslant x + 3$. Pour la première inégalité on a :

$$\begin{aligned} -x - 3 \leqslant 2x \text{ ssi } -3 &\leqslant 3x && \text{en ajoutant } x \text{ aux deux membres} \\ \text{ssi } -1 &\leqslant x && \text{en multipliant les 2 membres par } 1/3 > 0 \text{ ce qui conserve donc le sens de l'inégalité} \end{aligned}$$

Pour la seconde on calcule de même :

$$2x \leqslant x + 3 \quad \text{ssi } x \leqslant 3 \qquad \text{en ajoutant } -x \text{ aux deux membres}$$

L'ensemble A contient tous les x satisfaisant les deux conditions $-1 \leqslant x \leqslant 3$, on a donc $A = [-1, 3]$

Calcul de B. Cette fois on résout l'inégalité $|x^2 - 5x| < 6$ qui est équivalente à $-6 < x^2 - 5x < 6$.
La première inégalité, $-6 < x^2 - 5x$, est équivalente à $x^2 - 5x > -6$, puis $x^2 - 5x + 6 > 0$ par ajout de 6 aux deux membres. Il s'agit donc d'étudier le signe de $x^2 - 5x + 6$. Un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est du signe opposé à a lorsque x est entre ses racines (s'il y en a), du signe de a lorsque x est à l'extérieur des racines.
Il s'agit donc de déterminer les racines de $x^2 - 5x + 6$; on peut utiliser la méthode usuelle ($b^{-}4ac$) mais ici après un ou deux essais on voit que 2 est racine puisque $2^2 - 5.2 + 6 = 0$; comme le coefficient constant est 6, l'autre racine doit être 3 et en effet on vérifie facilement que $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Par conséquent l'inégalité $x^2 - 5x + 6 > 0$ est vérifiée lorsque $x < 2$ ou lorsque $x > 3$.
On procède de même pour la seconde inégalité $x^2 - 5x < 6$ qui est équivalente à $x^2 - 5x - 6 < 0$. Cette fois on voit que -1 est racine car $(-1)^2 - 5.(-1) + 6 = 0$, donc l'autre racine doit être 6 ce que l'on vérifie facilement en calculant $(x + 1)(x - 6)$. L'inégalité est donc vérifiée lorsque x est entre les racines c'est-à-dire pour $-1 < x < 6$.
Par conséquent l'encadrement $-6 < x^2 - 5x < 6$ est vérifié lorsque x satisfait les 2 contraintes :
— $x < 2$ ou $x > 3$ c'est-à-dire $x \in]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$ d'une part, et
— $-1 < x < 6$, c'est-à-dire $x \in]-1, 6[$ d'autre part.
En combinant celles-ci on obtient finalement :

$$B =]-1, 2[\cup]3, 6[$$

Calculs de $A \cup B$ et $A \cap B$.

$$\begin{aligned} A \cup B &= [-1, 3] \cup \big( ]-1, 2[\cup]3, 6[\big) \\ &= [-1, 6[. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= [-1, 3] \cap \big( ]-1, 2[\cup]3, 6[\big) \\ &=]-1, 2[\end{aligned}$$