



Les calculatrices et les documents sont interdits. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

### EXERCICE 1

---

1. Résoudre l'équation réelle

$$\ln(x - 2) + \ln(x - 3) = \ln(6).$$

2. On considère l'équation réelle

$$(E) \quad x^x = (\sqrt{x})^{x+1}.$$

- (a) Pour tout  $a \in ]0, +\infty[$  et pour tout  $b \in \mathbb{R}$ , donner la définition de  $a^b$ .  
(b) En utilisant la question précédente, résoudre l'équation (E).

### EXERCICE 2

---

On considère la fonction

$$f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{-\ln(x)}.$$

1. Montrer que, pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f(x) = \exp[-(\ln(x))^2]$ .  
2. Déterminer

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [f(x)] \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)].$$

3. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et calculer la dérivée de  $f$  sur cet intervalle.  
4. Dresser le tableau des variations de  $f$ .  
5. Déterminer, en utilisant les théorèmes du cours, les ensembles  $f(]0, 1])$  et  $f([1, +\infty[)$ , puis en déduire l'ensemble  $f(]0, +\infty[)$ .

### EXERCICE 3

---

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan(\sqrt{1+x^2} - x).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .  
2. Déterminer l'ensemble de dérivation de  $f$ . On notera  $E$  cet ensemble.  
3. Démontrer que pour tout  $x \in E$ ,

$$f'(x) = -\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

4. Déduire de la question précédente une autre expression de  $f$ .

### EXERCICE 4

---

1. On considère l'application

$$f : ] - 1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donner les primitives de l'application  $f$  sur  $] - 1, 1[$ .

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^9(x) \cos(x) dx, \quad \int_0^1 \frac{\exp(x)}{1 + \exp(x)} dx.$$

### EXERCICE 5

---

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose

$$I_n = \int_1^e x^2 \ln(x)^n dx.$$

1. En faisant une intégration par parties, calculer  $I_1$ .
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.$$