Licence de mathématiques et informatique

Introduction à l'analyse

Partiel 2 - 1er décembre 2017

Les calculatrices et les documents sont interdits. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1

1. Résoudre l'équation réelle
$$\ln(x-2)+\ln(x-3)=\ln(6).$$

Réponse. Cette équation n'est définie que si $x-2>0$ et $x-3>0$; on cherche donc des solutions qui vérifient $x>3$.
On a $\ln(x-2)+\ln(x-3)=\ln((x-2)(x-3))$ donc l'équation est équivalente à : $\ln((x-2)(x-3)=\ln(6)$. En appliquant la fonction exponentielle à chaque membre on obtient $(x-2)(x-3)=6$. On peut voir directement que cette dernière équation a pour solutions 0 et 5, mais si on ne le voit pas on peut continuer le calcul :

$$\begin{aligned} & (x-2)(x-3)=6 \\ \text{ssi} \quad & x^2-5x+6=6 \\ \text{ssi} \quad & x^2-5x=0 \\ \text{ssi} \quad & x(x-5)=0 \end{aligned}$$

ce qui donne les deux solutions annoncées : $x=0$ ou $x=5$. Mais $x=0$ ne vérifie pas la condition $x>3$, l'unique solution de l'équation est donc $x=5$. □

2. On considère l'équation réelle
$$(E) \quad x^x=(\sqrt{x})^{x+1}.$$

(a) Pour tout $a\in\,]0,+\infty[$ et pour tout $b\in\mathbb{R}$, donner la définition de a^b.

Réponse. $a^b=e^{b\ln(a)}$. □

(b) En utilisant la question précédente, résoudre l'équation (E).

Réponse. D'après la question précédente, pour $x>0$ on a : $x^x=e^{x\ln(x)}$ et $(\sqrt{x})^{x+1}=e^{(x+1)\ln(\sqrt{x})}$. On peut donc raisonner ainsi :

$$\begin{aligned} & x^x=(\sqrt{x})^{x+1} & \\ \text{ssi} \quad & e^{x\ln(x)}=e^{(x+1)\ln(\sqrt{x})} & \text{par définition} \\ \text{ssi} \quad & x\ln(x)=(x+1)\ln(\sqrt{x}) & \text{car la fonction exponentielle est injective} \\ \text{ssi} \quad & x\ln(x)=\frac{1}{2}(x+1)\ln(x) & \text{car } \ln(\sqrt{x})=\ln(x^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}\ln(x) \end{aligned}$$

L'équation est satisfaite si $\ln(x)=0$, c'est-à-dire si $x=1$, ce qui donne donc une première solution.
Si $x\neq 1$ on peut simplifier chaque membre par $\ln(x)$ qui est non nul, et l'équation devient : $x=\frac{1}{2}(x+1)$, soit $x=1$ ce qui ne se peut puisque on a supposé $x\neq 1$.
L'équation (E) a donc pour unique solution $x=1$. □

Exercice 2

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f:\,]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{-\ln(x)}. \end{aligned}$$

1. Montrer que, pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f(x)=\exp[-(\ln(x))^2]$.

RÉPONSE. D'après la définition de a^b (revue à l'exo précédent), en prenant $a = x$, $b = -\ln(x)$ on obtient : $x^{-\ln(x)} = e^{-\ln(x).\ln(x)} = e^{-\ln^2(x)}$. □

2. Déterminer

$$\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}}[f(x)] \quad \text{et} \quad \lim_{x\mapsto+\infty}[f(x)].$$

RÉPONSE. Quand $x \longrightarrow 0^+$ on a :

$$\begin{aligned} \ln(x) &\longrightarrow -\infty \\ \ln^2(x) &\longrightarrow +\infty \\ -\ln^2(x) &\longrightarrow -\infty \\ f(x) = e^{-\ln^2(x)} &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Quand $x \longrightarrow +\infty$ on a :

$$\begin{aligned} \ln(x) &\longrightarrow +\infty \\ \ln^2(x) &\longrightarrow +\infty \\ -\ln^2(x) &\longrightarrow -\infty \\ f(x) = e^{-\ln^2(x)} &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

□

3. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer la dérivée de f sur cet intervalle.

RÉPONSE. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $y \mapsto y^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto \ln^2(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; la fonction $y \mapsto e^{-y}$ est également dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto f(x) = e^{-\ln^2(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour calculer la dérivée de f on applique la formule de dérivation d'une fonction composée : $(g \circ h)'(x) = g'(h(x)).h'(x)$; ici g est la fonction $y \mapsto e^{-y}$ et h la fonction $x \mapsto \ln^2 x$. On a donc :

— $g'(y) = -e^{-y}$;

— pour calculer h' on applique la formule de dérivation : $(u^2)'(x) = 2u'(x)u(x)$; ici $u(x) = \ln(x)$, donc $u'(x) = 1/x$ et $h'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$.

Finalement on obtient $f'(x) = -e^{-\ln^2(x)} \cdot \dfrac{2\ln(x)}{x} = \dfrac{-2\ln(x)}{x} e^{-\ln^2(x)}$. □

4. Dresser le tableau des variations de f.

RÉPONSE. Comme $x > 0$ le dénominateur de la fraction est strictement positif. D'autre part $e^{-ln^2(x)}$ est toujours strictement positif également. Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-2\ln(x)$, positif si $x < 1$, nul pour $x = 1$, négatif quand $x > 1$. Si on calcule $f(1)$ on obtient : $f(1) = 1^{-\ln(1)} = 1$. Ce qui donne le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

□

5. Déterminer, en utilisant les théorèmes du cours, les ensembles $f(]0, 1[)$ et $f([1, +\infty[)$, puis en déduire l'ensemble $f(]0, +\infty[)$.

RÉPONSE. Sur $]0,1[$ la fonction f est strictement croissante, tend vers 0 en 0 et vers 1 en 1 ; donc $f(]0,1[) =]0,1[$. Sur $[1,+\infty[$ la fonction est strictement décroissante de 1 à 0, donc $f([1,+\infty[) =]0,1]$.
On en déduit que $f(]0,+\infty[) = f\left(]0,1[\cup[1,+\infty[\right) = f(]0,1[)\cup f([1,+\infty[) =]0,1[\cup]0,1] =]0,1]$.
Attention, on a appliqué ici une propriété de l'image directe d'une application : $f(X\cup Y) = f(X)\cup f(Y)$, qui est correcte avec l'union mais ne marche plus avec l'intersection : on n'a pas en général $f(X\cap Y) = f(X)\cap f(Y)$. □

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \arctan(\sqrt{1+x^2}-x). \end{aligned}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

   RÉPONSE. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$; le domaine de f est donc celui de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}-x$, qui est le même que celui de la fonction $x\mapsto\sqrt{1+x^2}$. Le domaine de la fonction racine est $\mathbb{R}_+$, donc le domaine de f est l'ensemble des x tel que $1+x^2$ est positif, ce qui est toujours le cas. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. □

2. Déterminer l'ensemble de dérivation de f. On notera E cet ensemble.

   RÉPONSE. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, le domaine de dérivabilité de f est donc celui de la fonction $x\mapsto\sqrt{1+x^2}-x$ qui est le même que celui de la fonction $x\mapsto\sqrt{1+x^2}$. Le domaine de dérivabilité de la fonction racine est $\mathbb{R}_+^*$, donc le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble des x tels que $1+x^2>0$, encore une fois c'est toujours le cas, donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$. □

3. Démontrer que pour tout $x\in E$,
$$f'(x) = -\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

   RÉPONSE. On calcule la dérivée de f en appliquant la formule de dérivation d'une fonction composée : $(g\circ h)'(x) = g'(h(x)).h'(x)$. Ici $g(y) = \arctan(y)$, donc $g'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$ et $h(x) = \sqrt{1+x^2}-x$. Pour calculer h' on applique à son premier terme la formule de dérivation $(\sqrt{u})'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1 \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \\ &= \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

   En combinant les deux on obtient alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(\sqrt{1+x^2}-x)^2}\cdot\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{1+(1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+x^2)}\cdot\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{2(1+x^2-x\sqrt{1+x^2})}\cdot\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-x)}\cdot\frac{-(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{2(1+x^2)} \end{aligned}$$

□

4. Déduire de la question précédente une autre expression de f.

RÉPONSE. On voit que $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\arctan'(x)$; par conséquent $f(x) = -\frac{1}{2}\arctan(x) + C$ où C est une constante additive à déterminer. Pour cela calculons $f(0) = \arctan(\sqrt{1+0^2} - 0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. D'autre part, pour $x = 0$ on a $-\frac{1}{2}\arctan(x) + C = -\frac{1}{2}\arctan(0) + C = C$. On en déduit que $C = \frac{\pi}{4}$ et finalement :

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan(x) = \frac{\pi - 2\arctan(x)}{4}$$

□

EXERCICE 4

1. On considère l'application

$$\begin{aligned} f :]-1,1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Donner les primitives de l'application f sur $]-1,1[$.

RÉPONSE. C'est l'une des fonctions du cours, ses primitives sont les fonctions $x \mapsto \arcsin(x) + C$, où C est une constante ne dépendant pas de x. □

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^9(x)\cos(x)\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{\exp(x)}{1+\exp(x)}\,dx.$$

RÉPONSE. Comme cos est la dérivée de sin on voit que la fonction $x \mapsto \sin^9(x)\cos(x)$ est de la forme $u^9(x).u'(x)$ dont une primitive est la fonction $x \mapsto \frac{1}{10}u^{10}(x)$. Par conséquent :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^9(x)\cos(x)\,dx = \left[\frac{1}{10}\sin^{10}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10} = \frac{1}{10}\cdot\frac{3^5}{2^{10}} = \frac{243}{10240}$$

La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ où $u(x) = 1 + e^x$. Une primitive est donc $\ln u$ ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{\exp(x)}{1+\exp(x)}\,dx = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

□

EXERCICE 5

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n = \int_1^e x^2 \ln(x)^n\,dx.$$

1. En faisant une intégration par parties, calculer I_1.

Réponse. On a donc : $I_1 = \displaystyle\int_1^e x^2 \ln(x)\, dx$. On pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(x) & \rightsquigarrow \quad u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v'(x) &= x^2 & \rightsquigarrow \quad v(x) &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

La formule d'intégration par parties ($\int uv' = [uv] - \int u'v$) nous donne alors :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\ln(x) \cdot \frac{x^3}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3}\, dx \\ &= \frac{1}{3}\left(\left[x^3 \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e x^2\, dx\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\left[x^3 \ln(x)\right]_1^e - \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(e^3 \ln(e) - \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right)\right) \\ &= \frac{2e^3 + 1}{9} \end{aligned}$$

□

2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.$$

Réponse. On a $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^e x^2 \ln(x)^{n+1}\, dx$. On applique à nouveau la formule d'intégration par parties en choisissant cette fois :

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln^{n+1}(x) & \rightsquigarrow \quad u'(x) &= \frac{(n+1)\ln^n(x)}{x} \\ v'(x) &= x^2 & \rightsquigarrow \quad v(x) &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\ln^{n+1}(x) \cdot \frac{x^3}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{(n+1)\ln^n(x)}{x} \cdot \frac{x^3}{3}\, dx \\ &= \frac{1}{3}\left(\left[x^3 \ln^{n+1}(x)\right]_1^e - (n+1)\int_1^e x^2 \ln^n(x)\, dx\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(e^3 - (n+1) I_n\right) \end{aligned}$$

□