

**Planche 1**  
Logique, langage mathématique

## Logique

### EXERCICE 1

Rédiger les négations des phrases suivantes.

1. Tous les lundi, je joue au foot.
2. Quand il fait beau le dimanche, je fais des maths.
3. Tous les lundi, s'il fait beau, je ne fais pas des maths.

### EXERCICE 2

Donner la négation des assertions ci-dessous. Déterminer si ces assertions sont vraies ou fausses.

1.  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ .
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ .
3.  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$ .

### EXERCICE 3

Exprimer les affirmations suivantes en symboles mathématiques :

1. Tout entier naturel est plus petit ou égal à son carré.
2. Si le produit de deux nombres réels est nul, alors un des deux facteurs est nul.
3. Tout ensemble non vide d'entiers naturels contient un plus petit élément.

### EXERCICE 4

Démontrer l'implication  $0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq y^2$ . Écrire sa contraposée et sa réciproque. Déterminer si sa réciproque est vraie.

### EXERCICE 5

Montrer par récurrence que  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### EXERCICE 6

Démontrer par récurrence l'inégalité  $2^n \geq n^2$ , pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à un entier  $n_0$  qu'on déterminera. A-t-on  $2^n \geq n^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ?

### EXERCICE 7

Soit  $a$  un réel. Montrer par contraposée, que si  $\forall \varepsilon > 0 a \leq \varepsilon$ , alors  $a \leq 0$ .

### EXERCICE 8

Montrer par l'absurde que  $\sqrt{2}$  est un irrationnel (écrire  $\sqrt{2}$  sous forme d'une fraction irréductible  $\frac{p}{q}$  et discuter la parité de  $p$  et  $q$ ).

## Ensembles

### EXERCICE 9

Soient  $A, B, C$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ . Montrer les affirmations suivantes :

1.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
2.  $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$ .
3.  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .
4.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .
5.  $A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$ .

### EXERCICE 10

1. Donner une liste de tous les sous-ensembles de l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ .
2. Montrer par récurrence qu'un ensemble à  $n$  éléments possède  $2^n$  sous-ensembles.

**EXERCICE 11**

Soit  $A$  l'ensemble des diviseurs de 45 et soit  $B$  l'ensemble des diviseurs de 165. Déterminer  $A$ ,  $B$ ,  $A \cap B$  et  $A \cup B$ .

**EXERCICE 12**

Soient les ensembles  $A = [1, 4]$ ,  $B = [3, 6]$ ,  $C = [2, 5]$  et  $D = \{2\}$ .

1. Tracer dans  $\mathbb{R}$  les ensembles suivants :  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus D$ .
2. Tracer dans  $\mathbb{R}^2$  les ensembles suivants :  $(A \cap B) \times A$ ,  $B^c \times (A \cup C)$ ,  $(A \setminus D) \times D$ .

**EXERCICE 13**

Définir en termes d'intervalles les ensembles suivants :

1.  $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq |x + 3|\}$ ,
2.  $B = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2x - 3| > 2x + 1\}$ ,
3.  $C = \{x \in \mathbb{R} : |x - |x + 1|| < 2\}$ .

**EXERCICE 14**

Soit  $[t, \infty[ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq t\}$ . Calculer  $A = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} [t, \infty[$  et  $B = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} [t, \infty[$ .

**Applications****EXERCICE 15**

On donne  $E = \{a, b, c, d\}$  et  $F = \{1, 2, 3, 4\}$ . Déterminer  $f(\{a, b, c\})$  et  $f^{-1}(\{1, 3\})$  pour les applications  $f : E \rightarrow F$  suivantes :

1.  $f(a) = 1$ ,  $f(b) = 3$ ,  $f(c) = 4$ ,  $f(d) = 2$ ,
2.  $f(a) = f(b) = 2$ ,  $f(c) = f(d) = 3$ ,
3.  $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 2$ .

**EXERCICE 16**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application, et soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

1. Démontrer que  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .
2. Démontrer que  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$  et trouver un contre-exemple qui montre que l'égalité peut être fautive.
3. Démontrer que  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  si  $f$  est injective.

**EXERCICE 17**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application, et soient  $C$  et  $D$  deux parties de  $F$ .

1. Démontrer que  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ .
2. Démontrer que  $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ .

**EXERCICE 18**

Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications. Montrer les implications suivantes :

1.  $f$  et  $g$  injectives  $\Rightarrow g \circ f$  est injective.
2.  $f$  et  $g$  surjectives  $\Rightarrow g \circ f$  est surjective.
3.  $g \circ f$  surjective  $\Rightarrow g$  est surjective. Peut-on aussi conclure que  $f$  est nécessairement surjective ?
4.  $g \circ f$  injective  $\Rightarrow f$  est injective. Peut-on aussi conclure que  $g$  est nécessairement injective ?

**EXERCICE 19**

On considère l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ .

1. Déterminer : (i)  $f([-1, 1])$ , (ii)  $Im(f)$ , (iii)  $f^{-1}([0, 1])$ , (iv)  $f^{-1}(]-\infty, 0])$ .
2. L'application  $f$  est-elle injective, surjective, bijective ?

**EXERCICE 20**

L'application suivante est-elle injective, surjective, bijective ?  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ .

**EXERCICE 21**

1. On considère l'application  $f : [-1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  définie par  $f(x) = (x + 1)^2$ . Montrer que  $f$  est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.

2. On considère l'application  $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$  définie par  $g(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$ . Montrer que  $g$  est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.

3. On considère l'application  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h(x) = x^2 + 2x$ . Est-elle injective, surjective, bijective ? Déterminer deux intervalles  $I$  et  $J$  tels que l'application  $\tilde{h} : I \rightarrow J$ , définie par  $\tilde{h}(x) = x^2 + 2x$  soit bijective. Déterminer l'expression de sa réciproque.

**EXERCICE 22**

Choisir et représenter graphiquement une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie :

1.  $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$ .
2.  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$ .
3.  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ .
4.  $\exists x \in \mathbb{R} : x < f(x)$ .

**EXERCICE 23**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Traduire avec les quantificateurs les expressions suivantes.

1.  $f$  est majorée;
2.  $f$  est bornée;
3.  $f$  ne s'annule jamais;
4.  $f$  est croissante.

**EXERCICE 24**

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour chaque énoncé suivant donner la négation et indiquer lequel de l'énoncé ou sa négation est vrai.

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \leq 1$ .
2. L'application  $f$  est croissante.
3. L'application  $f$  est croissante et positive.
4. Il existe  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq 0$  tel que  $f(x) \leq 0$ .
5. Il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que quel que soit  $y \in \mathbb{R}$ , si  $x < y$  alors  $f(x) > f(y)$ .