

**Planche 2**  
Nombres réels, fonctions

### Opérations sur les réels, inégalités dans $\mathbb{R}$

#### EXERCICE 1

Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que  $a - b, a - c$  et  $b - c$  soient non nuls. Calculer les expressions suivantes

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$
$$\frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}.$$

#### EXERCICE 2

Soient  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ , et soit  $I = ]a, b[$ .

- Démontrer qu'il existe un nombre réel rationnel  $c \in \mathbb{Q}$  tel que  $a < c < b$ .
- Démontrer qu'il existe un nombre réel irrationnel  $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  tel que  $a < d < b$ .
- En déduire que les ensembles  $I \cap \mathbb{Q}$  et  $I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  sont infinis.

#### EXERCICE 3

Démontrer  $2xy \leq x^2 + y^2$  et  $xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$  pour  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

#### EXERCICE 4

Démontrer  $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  non nul.

#### EXERCICE 5

Démontrer  $(1+x)^n \geq 1+nx$  pour  $x \in \mathbb{R}, x \geq -1, n \in \mathbb{N}$ .

#### EXERCICE 6

Déduire de l'exercice 5) que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$  pour  $a \in \mathbb{R}, a > 1$ .

#### EXERCICE 7

Soit  $a \in \mathbb{R}, a > 1$  et soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $x_n = \frac{a^n}{n^k}, n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe  $b > 1$  tel que  $x_{n+1} \geq bx_n$  pour tout  $n$  assez grand. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty$ .

#### EXERCICE 8

1. Soit  $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$ . Démontrer  $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. En déduire que la série géométrique infinie satisfait  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ , pour  $x \in \mathbb{R}, |x| < 1$ .

#### EXERCICE 9 [Somme télescopique]

1. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ .

2. Soit  $n$  un entier non nul, en déduire une expression simple de  $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)}$ .

#### EXERCICE 10

On désigne par  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ . Exprimer, sous forme de conditions sur  $x$ , en utilisant les valeurs absolues, les relations d'appartenance suivantes :

$$x \in [-1, 5], \quad x \in ]2, 5[, \quad x \in [-5, -3], \quad x \in ]a, b[.$$

#### EXERCICE 11

Déterminer les intervalles de  $\mathbb{R}$  définis par les conditions suivantes sur  $x$  :  $|x-1| \leq 4$  puis  $|x+|x|| \geq 2$ .

**EXERCICE 12**

Démontrer, en utilisant la définition de la valeur absolue :

- (a)  $|x + y| \geq ||x| - |y||$  pour  $x, y \in \mathbb{R}$ .  
 (b)  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$  pour  $x, y \in \mathbb{R}^*$ ,  $y \neq 0$ ,

**EXERCICE 13**

Démontrer que la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$  est bornée et dessiner son graphe.

**EXERCICE 14**

Dessiner les graphes des fonctions suivantes :

- $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x) = [x^2]$
- $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v(x) = \sqrt{1 - x^2}$
- $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w(x) = \sin(\sqrt{x})$ .

**EXERCICE 15**

Démontrer que pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$  on a  $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$ .

**EXERCICE 16**

Soit  $I = \{x \in \mathbb{R}; -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2\}$ .

- Déterminer les réels  $x$  tels que  $x + \frac{1}{2x} \leq 2$ .
- Déterminer les réels  $x$  tels que  $-2 < x + \frac{1}{2x}$ .
- Montrer que  $I$  est la réunion de deux intervalles.
- Déterminer (si ils existent) les majorants, minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément de  $I$ .

**EXERCICE 17**

Démontrer qu'un nombre réel  $x$  est rationnel si et seulement si son développement décimal

$$x = \sum_{n=-n_0}^{\infty} a_n 10^{-n}, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

devient périodique, i.e. il existe  $N, T \in \mathbb{N}$  tels que  $a_{n+T} = a_n$  pour  $n \geq N$ .

**Fonctions usuelles****EXERCICE 18**

Résoudre les équations suivantes :

- $\ln(x^2 - 1) = \ln(2 - x) + \ln(3 - x)$ .
- $\exp(2x) - 3 \exp(x) + 2 = 0$ .

**EXERCICE 19**

Soit  $\alpha > 0$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\exp(x)}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ .

Traiter d'abord le cas  $\alpha = 1$  en utilisant les exos 6 et 7.

**EXERCICE 20**

Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité, puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}, \quad f_3(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5},$$

$$f_4(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}, \quad f_5(x) = \exp(\sin(x) + \cos(x)), \quad f_6(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$f_7(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right), \quad f_8(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

**EXERCICE 21**

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Calculer les limites de  $f$  au bord du domaine de définition.
3. Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$ , puis calculer la dérivée de  $f$ .
4. Déterminer le tableau des variations.
5. Représenter graphiquement  $f$ .

**EXERCICE 22**

Étudier la fonction  $g(x) = x \exp^{-x^2}$  (domaine de définition, périodicité, parité, tableau, courbes).

**Fonctions réciproques****EXERCICE 23** [Fonction arcsin]

1. Démontrer que la fonction  $\sin : \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1]$  est bijective.
2. Rappeler la définition de la fonction arcsin.
3. Démontrer que arcsin est dérivable sur  $] -1, 1[$ .
4. Calculer la dérivée de arcsin.

**EXERCICE 24** [Fonction arctan]

1. Démontrer que la fonction  $\tan : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R}$  est bijective.
2. Rappeler la définition de la fonction arctan.
3. Démontrer que arctan est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
4. Calculer la dérivée de arctan.

**EXERCICE 25**

Résoudre les équations suivantes.

1.  $\cos(x) = \frac{1}{2}$ , puis  $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\tan(x) = 1$ .
2.  $\cos(3x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , puis  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$  et  $\sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ .