Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2017-2018

Planche 3
Intégration

Intégration et primitives

Exercice 1
Calculer les intégrales suivantes :

$$(a)\ \int_0^1 xe^{-x}dx \qquad (b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x dx \qquad (c)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(5x)+\sin(2x)]dx \qquad (d)\ \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$$

$$(e)\ \int_0^2 |1-x|dx \qquad (f)\ \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx \qquad (g)\ \int_1^a \frac{x+1}{e^x}dx$$

Exercice 2
Trouver une primitive de $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ (Indication : noter que $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x) = \frac{d}{dx}x \cdot \ln(x)$ et faire une intégration par parties).

Exercice 3
Trouver une primitive de $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}dx$ (Indication : utiliser la substitution $x = \sin t$).

Exercice 4
Trouver une primitive de $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ (Indication : écrire $\frac{1}{1-x^2}$ comme $\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ convenable).

Exercice 5
Trouver une primitive de la fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.

Exercice 6
Trouver une primitive de la fonction $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (Indication : rappeler la dérivée de la fonction arcsin).

Exercice 7
Trouver une primitive de la fonction $\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}$ (Indication : noter que $\arcsin(x) = 1 \cdot \arcsin(x) = \frac{d}{dx}x \cdot \arcsin(x)$ et faire une intégration par parties).

Exercice 8
Justifier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer :

$$(a)\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} [1+\tan^2(x)]dx, \qquad (b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(2x)dx, \qquad (c)\ \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Exercice 9
Préciser l'intervalle sur lequel l'intégrale suivante est définie puis la calculer en utilisant le changement de variable indiqué : $\displaystyle\int \sin(\sqrt{x})dx$; on posera $x = t^2$.

Exercice 10
Effectuer deux intégrations par parties pour calculer les intégrales suivantes :

$$(a)\ \int_{-1}^1 (x+1)^2 e^{-x}dx, \qquad (b)\ \int_a^b e^x \cos x dx, \qquad (c)\ \int_{-\pi}^0 x^2 \sin 2x dx.$$

Exercice 11
On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos^2 x dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\sin^2 x dx$.

1. Calculer $I + J$.
2. Calculer $I - J$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice 12
Calculer les primitives suivantes et préciser sur quel intervalle elles sont définies :

$$(a)\ \int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx, \qquad (b)\ \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx, \qquad (c)\ \int \frac{(\ln x)^2}{x}dx, \qquad (d)\ \int \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}dx.$$

Exercice 13
Soit n un entier naturel. Calculer l'intégrale : $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$ (Indication : si n est plus grand que 2, intégrer par parties afin d'obtenir la relation de récurrence $nJ_n = (n-1)J_{n-2}$).

Exercice 14
On considère la fonction réelle suivante : $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)(x-5)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Décomposer f, qu'on appelle *fraction rationnelle*, en une somme de deux fractions.
3. En déduire toutes les primitives de f.