Université d'Aix-Marseille | Licence de Mathématiques
Semestre 1 | 2017-2018

Planche 4
Équations différentielles

Exercice 1
Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y' = \frac{t}{y^3(t)}.$$

Exercice 2
Résoudre l'équation différentielle $y'(t) = -2ty^2(t)$ à condition initiale $y(0) = -1$ resp. $y(0) = 0$.
Qu'en pensez-vous ?

Exercice 3
1. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle $y'(t) = y(t)^2$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Trouver le domaine de définition maximal de la solution à condition initiale $y(a) = b$.

Exercice 4
Résoudre les équations différentielles $y'(t) + 5y(t) = 0$, $2y'(t) - 3y(t) = 0$ et $(1 + t^2)y'(t) + 4ty(t) = 0$.

Exercice 5
On considère l'équation différentielle inhomogène $(*)$ $y'(t) - 2ty(t) = t$ et l'équation homogène associée $(**)$ $y'(t) - 2ty(t) = 0$.
1. Pour quelle(s) valeur(s) de C la fonction constante $f(x) = C$ est-elle une solution de $(*)$?
2. Résoudre $(**)$, puis en déduire toutes les solutions de $(*)$.
3. Retrouver le résultat de 1. en utilisant la méthode de la variation de la constante.

Exercice 6
On considère l'équation différentielle inhomogène (E) $y'(t) + y(t) = \cos(t)$ et l'équation homogène associée (e) $y'(t) + y(t) = 0$.
1. Trouver une solution de (E) de la forme $y(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$.
2. Résoudre (e).
3. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 7
Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + 2ty(t) = \exp(t - t^2)$.

Exercice 8
On considère l'équation différentielle inhomogène $y'(t) + \frac{3t}{t^2+1}y(t) = \frac{t}{t^2+1}$.
1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Trouver la solution générale de l'équation originale.
3. Trouver la solution de l'équation originale à condition initiale $y(0) = 2$.

Exercice 9
Trouver toutes les solutions des équations différentielles suivantes.
1. $y''(t) + 3y(t) = 0$.
2. $3y''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0$.
3. $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0$.

Exercice 10
Résoudre les équations différentielles suivantes.
1. L'équation homogène $y''(t) - y(t) = 0$ à condition initiale $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
2. L'équation inhomogène $y''(t) - y(t) = \exp(2t)$ à condition initiale $y(0) = y'(0) = 0$ (Indication : chercher une solution particulière de la forme $y(t) = const \cdot \exp(2t)$).

Exercice 11
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. L'équation homogène $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$ à condition initiale $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
2. L'équation inhomogène $y''(t)-4y'(t)+4y(t) = te^{4t}$ à condition initiale $y(0) = y'(0) = 0$ (Indication : chercher une solution particulière de la forme $y(t) = e^{4t}(at + b)$).

Exercice 12
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. L'équation homogène $y''(t) + 4y(t) = 0$ à condition initiale $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.
2. L'équation inhomogène $y''(t) + 4y(t) = \cos(2t)$ à condition initiale $y(0) = y'(0) = 0$ (Indication : chercher une solution particulière de la forme $y(t) = const \cdot \sin(2t)$).

Exercice 13
Résoudre l'équation différentielle $y''(t) + y'(t) + y(t) = 2t + 1$.

Exercice 14
Trouver toutes les solutions des équations différentielles suivantes.

1. $2ty'(t) + 3y(t) = t^3$.
2. $(1 + t^2)y'(t) + ty(t) - 2t = 0$.
3. $t(t - 1)y'(t) - (2t - 1)y(t) + t^2 = 0$.