Année universitaire 2017-2018

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1^{er} semestre ☐ $2^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence mathématiques et informatique
Code du module : SMI1U1TL Libellé du module : Introduction à l'analyse
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Sujet sur 2 pages !

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application.

Soit (X) l'assertion : "L'application f est croissante."

1. Écrire en langage mathématique l'assertion (X).
2. Écrire en langage mathématique la négation de (X).
3. Donner, en justifiant, un exemple d'application f qui n'est ni croissante, ni décroissante.

Exercice 2

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^{\cos(x)}}{2+\sin(x)}$.

1. Montrer que la fonction f n'est pas injective en utilisant la définition de l'injectivité.
2. Montrer que la fonction f n'est pas surjective en utilisant la définition de la surjectivité.
3. Calculer la dérivée de la fonction f.

Exercice 3

1. Calculer l'intégrale
$$\int_0^1 \exp(-2x)(x^2 - x - 2)\, dx.$$
en faisant une double intégration par partie.
2. Calculer l'intégrale
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$
3. Calculer l'intégrale
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx.$$

Exercice 4

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x + 2x^3}{1 + x^2} - \arctan(x)$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et ∞.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer la dérivée de f.
5. Établir le tableau de variations de f.
6. Déterminer l'ensemble $f(\mathbb{R})$.
7. Démontrer que f est une application bijective de $\mathbb{R}$ sur I avec I un intervalle à déterminer.
8. Calculer $f(0)$ et $f^{-1}(0)$.
9. Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1}.

Exercice 5

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ par

$$y'(x) - 4xy(x) = -x. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (E).
2. En utilisant la méthode de la variation de la constante (ou méthode de Lagrange), calculer une solution particulière de (E).
3. En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution y qui vérifie la condition $y(0) = 1$.