Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

Année universitaire 2018-2019

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Portail Descartes
Code du module : SPO1U3 Libellé du module : Langage Mathématique
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1

Pour toute application f de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on note $A(f)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ suivant (appelé l'ensemble des *points fixes* de f) :

$$A(f) = \{x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x\}.$$

On considère la relation $\mathscr{R}$ sur l'ensemble des applications de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ suivante : $f \mathscr{R} g$ ssi $A(f) = A(g)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note i_n l'application de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par $i_n(x) = x^n$.

1.1. [1 pt] Montrer que $A(i_1) =]0,+\infty[$. En déduire toutes les applications g de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que $i_1 \mathscr{R} g$.

1.2. [1 pt] Montrer que $A(i_2) = A(i_n)$, pour tout entier $n \geqslant 2$.

2. [1,5 pt] Montrer que $\mathscr{R}$ définit une relation d'équivalence.

3. [1 pt] Soit (P) l'assertion : $f \mathscr{R} g \Rightarrow g\big(A(f)\big) = A(f)$. Écrire sa contraposée et sa réciproque.

4. [1 pt] Montrer que (P) est vraie.

5. [1 pt] Calculer $i_1\big(A(i_0)\big)$. En déduire que la réciproque de (P) est fausse.

Exercice 2

1. [2 pt] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Donner la définition mathématique de « f est *injective* », de « f est *surjective* » et de « f est *bijective* ». Pour une fonction f bijective, définir sa *fonction réciproque*.

2. [1 pt] Soient f et g deux bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $g \circ f$ est bijective et que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application, et soient (X) et (Y) les assertions suivantes :

(X) : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, (y = f(x)$ et $\forall z \in \mathbb{R}, z \neq x \Rightarrow y \neq f(z))$.

(Y) : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = f(y) \iff x = y$.

3.1. [1 pt] Écrire la négation de (X).

3.2. [1 pt] Parmi (X) et (Y) laquelle est équivalente à « f bijective » ? Justifier.

Exercice 3

Soit f la fonction de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1/x)$.

1. [2 pt] Montrer que f est bijective et donner sa fonction réciproque.

2. Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : $I = f(\mathbb{N}^*)$ et $J = \{1/n; n \in \mathbb{N}^*\}$.

2.1. [1 pt] Donner l'ensemble de leurs minorants, et de leurs majorants dans $\mathbb{R}$; justifier.

2.2. [1 pt] Donner leurs bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$, si elles existent ; justifier.

Tourner SVP

Exercice 4

Soient $A = \{1, 2, 3\}$ que l'on considère ordonné par l'ordre usuel et $P = \mathscr{P}(A) \smallsetminus \{\emptyset\}$.

1. [0.5 pt] Donner la liste des éléments de P.

2. [0,5 pt] Soit B une partie de A et $b \in A$; rappeler la définition mathématique de : « b est le maximum de B ».

3. [0.5 pt] Soit l'ensemble $G = \{(B, b) \in P \times A \mid b \in B \text{ et } \forall x \in B,\ x \leqslant b\}$. Donner la liste des éléments de G.

4. [1 pt] Soient $B \in P$ et b_1, $b_2 \in A$. Montrer que si $(B, b_1) \in G$ et $(B, b_2) \in G$ alors $b_1 = b_2$.

5. [1 pt] En déduire explicitement une application $f : P \to A$.

6. [1 pt] Calculer l'image $f(P)$ de P par f ; puis les images réciproques $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\{3\})$.

7. [0,5 pt] Donner la définition de la relation d'équivalence $\mathscr{R}_f$ associée à l'application f.

8. [1 pt] En déduire la classe d'équivalence de $\{3\}$ pour la relation $\mathscr{R}_f$ et l'exprimer à l'aide de f. Justifier.