

**Langage et raisonnements mathématiques**

Partiel – 25 octobre 2019

Ni document, ni calculatrice, ni téléphone.

Note sur 20. Barème sur 22. On peut traiter les exercices dans l'ordre de son choix.

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

**Exercice 1**

1. [2 pt] Exprimer en termes d'intervalles l'ensemble  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |4 - x^2| < 3x\}$ .

**Exercice 2**

On considère les assertions suivantes :

$$P(n) : n \geq 5 \Rightarrow n^2 + 8 > 6n, \quad Q : \forall n \in \mathbb{N}, P(n).$$

- [2 pt] Écrire la réciproque et la contraposée de  $P(n)$ .
- [1 pt] Expliciter la négation de  $Q$ .
- [2 pt] Montrer que l'assertion  $Q$  est vraie.

**Exercice 3**Dans cet exercice,  $A$  et  $B$  sont des ensembles quelconques.

- [0,5 pt] Écrire la définition de  $A \subset B$  de façon formelle.
- [0,5 pt] À quelle condition a-t-on  $A \in \mathcal{P}(B)$  ?
- [2 pt] Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des éléments de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  ? Lesquels sont des parties de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  ?

$$\emptyset, \quad \{0, 1\}, \quad [0, 1], \quad \{\emptyset\}.$$

4. [2 pt] En utilisant vos réponses aux questions 1 et 2, démontrer l'assertion suivante :

$$A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B).$$

**Exercice 4**On considère l'ensemble  $E = \{0, 1, 2\}$  et les applications  $f, g : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  définies de la façon suivante :

$$f(X) = X \cup \{0, 1\}, \quad g(X) = X \cap \{1, 2\}.$$

- [1 pt] Écrire l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  explicitement.
- [2 pt] Déterminer les ensembles suivants :  $\text{Im}(f)$ ,  $\text{Im}(g)$  et les images réciproques  $f^{-1}(\{E\})$  et  $g^{-1}(\{E\})$ .

**Exercice 5**Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $f(x) = 4 - x^2$ .

- [2 pt] Exprimer les ensembles  $\text{Im}(f)$  et  $f([-1, 2])$  en termes d'intervalles.
- [2 pt] De même, expliciter les images réciproques par  $f$  des ensembles  $\{0\}$ ,  $\mathbb{R}_+$ .
- [1 pt] Donner une formule explicite pour la composée  $g = f \circ f$ .
- [2 pt] Expliciter l'image réciproque de  $\{0\}$  par  $g$ .