Année universitaire 2019-2020

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1$^{\text{er}}$ semestre ☐ 2$^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Portail Descartes
Code du module : SPO1U03 Libellé du module : Langage Mathématique
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1 (Questions de cours)

Soient $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle $\leqslant$, A une partie de $\mathbb{R}$ et m un nombre réel. Donner les définitions suivantes :

1. [0,5 pt] m est un majorant de A,
2. [0,5 pt] m est la borne supérieure de A,
3. [0,5 pt] m est le plus grand élément de A,
4. [0,5 pt] m est un élément maximal de A.

Exercice 2

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et soit $f : E \to \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ l'application donnée par $f(n) = \{k \in E \mid k \text{ divise } n\}$. Soit $g : \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\} \to E$ l'application donnée par $g(A) = \operatorname{card}(A)$.

1. [2 pt] Calculer $f(4)$ et $f(6)$. Également, calculer $g(E)$ et $g(\{2, 4, 6\})$.
2. [2 pt] Donner l'ensemble image de f, puis justifier si elle est injective et/ou surjective.
3. [2 pt] Préciser $\operatorname{Im}(g \circ f)$. Montrer que $g \circ f$ n'est ni injective ni surjective.
4. [1 pt] Déterminer $f^{-1}(\{\{1, 5\}\})$.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f_a(x) := \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. [2 pt] Montrer que f_a est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Est-ce que f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$? Justifier votre réponse.
2. [2 pt] Montrer que f_a est majorée sur $]-\infty, 0[$, et minorée sur $]0, +\infty[$. Préciser $\sup\limits_{x \in]-\infty, 0[} f_a(x)$ et $\inf\limits_{x \in]0, +\infty[} f_a(x)$.
3. [2 pt] Préciser $f_a(]-\infty, 0[)$ et $f_a(]0, +\infty[)$ en justifiant vos réponses.
4. [1 pt] En déduire l'ensemble image de f_a, puis déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que f_a soit surjective, en justifiant votre réponse.
5. [2 pt] Montrer que f_1 est bijective, et préciser l'application réciproque f_1^{-1}.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \cos(x)$.

1. [2 pt] Préciser les classes d'équivalence de 0 et $\frac{\pi}{3}$ par rapport à la relation d'équivalence $\mathscr{R}_f$ associée à f.
2. [2 pt] Justifier précisément qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{R}/\mathscr{R}_f \to [-1, 1]$.

Exercice 5

Soient $E = \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $F = \{5^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. [2 pt] Montrer que la relation $\mathscr{R}$ sur E

$$x \mathscr{R} y \quad \text{ssi} \quad x \text{ divise } y$$

est une relation d'ordre sur E.

2. [1 pt] Montrer que cette relation est une relation d'ordre total sur E.

3. [1 pt] Montrer que la divisibilité définit une relation d'ordre partiel (c'est-à-dire non total) sur $E \cup F$. (On admettra que c'est une relation d'ordre sur $E \cup F$.)