Planche 1
Langage et raisonnement mathématique

1 Opérateurs logiques et quantificateurs

Exercice 1
Établir si les assertions suivantes sont vraies et, si elles ne le sont pas, écrire leur négation. On précisera quels opérateurs logiques et quantificateurs apparaissent dans chaque assertion.

1. Pour tout pays, il existe une ville qui est sa capitale.
2. Tout animal qui possède quatre pattes est un mammifère.
3. Tout animal possède quatre pattes ou est un mammifère.
4. Il existe un animal qui possède deux pattes et qui est un mammifère.
5. Si je suis une fille alors je porte une jupe.
6. En France, toute personne qui conduit seule a au moins 18 ans.
7. En France, toute personne qui a au moins 18 ans conduit seule.

Exercice 2
Donner la négation des assertions ci-dessous.

1. $x \geq 10$.
2. $1 < x \leq 5$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 > x$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \big(x > 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R}, 0 < y < x)\big)$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \big(\forall z \in \mathbb{R}, x < y \text{ et } y \geq z \text{ et } x \leq z < y^2\big)$.
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \big((x < y \text{ et } y < z) \Rightarrow x < y < z\big)$.
9. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}^+, \big((x^2 \leq y^2 \text{ et } y < z) \text{ ou } x \leq y < \sqrt{z}\big)$.
10. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \big(x < y \text{ et } y \geq z \text{ et } x \leq z < y^2\big)$.

Exercice 3
Écrire la contraposée et la réciproque des implications ci-dessous.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \big(x > 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R}, 0 < y < x)\big)$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \big((x < y \text{ et } y < z) \Rightarrow x < y < z\big)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq y^2)$.

Exercice 4
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I. Pour chacune des assertions suivantes, exprimer sa négation puis trouver une fonction qui la vérifie et une autre qui vérifie sa négation.

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$.
3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$.
4. $\forall x \in I, \forall y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
5. $\forall x \in I, \forall y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
6. $\forall x \in I, f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$.

Exercice 5
Exprimer les affirmations suivantes en symboles mathématiques.

1. Tout entier naturel est plus petit ou égal à son carré.
2. Si le produit de deux nombres réels est nul, alors un des deux facteurs est nul.

2 Raisonnements logiques - Quantificateurs

Exercice 6
Déterminer si ces assertions sont vraies ou fausses.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.

Exercice 7

1. Démontrer l'implication $0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq y^2$.
2. Écrire sa réciproque, puis la négation de sa réciproque.
3. Déterminer si la réciproque est vraie.

3 Récurrence - Absurde - Contraposée

Exercice 8
Montrer par récurrence les affirmations suivantes

1. $0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Si $a \neq 1$, alors : $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9
Démontrer par récurrence l'inégalité $2^n \geq n^2$, pour tout entier n supérieur ou égal à un entier n_0 que l'on déterminera. A-t-on $2^n \geq n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 10
Soient a et b deux entiers. On dit que a *divise* b s'il existe un entier k tel que $b = ak$.

1. Ecrire la négation de a divise b.
2. Montrer les affirmations suivantes, avec a, b et c des entiers.
   (a) a divise a.
   (b) Si a divise b et b divise c alors a divise c.
   (c) Si a divise b et b divise a alors $a = b$ ou $a = -b$.
   (d) a divise 0.
3. Soient a, b, c trois entiers tels que a divise b. Si a ne divise pas c, montrer par contraposée que a ne divise pas $b + c$.

Exercice 11
Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

1. $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.
2. $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq 8\varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

Exercice 12
Soit a un réel. Montrer par contraposée, que si $\forall \varepsilon > 0\ a \leq \varepsilon$, alors $a \leq 0$.

Exercice 13
Montrer par l'absurde l'affirmation suivante : « $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel ». *Indication : écrire* $\sqrt{2}$ *sous forme d'une fraction irréductible* $\dfrac{p}{q}$ *et discuter la parité de* p *et* q.
Démontrer de même que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 14
Soit (u_n) la suite réelle définie par : $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\,.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = 2^n + 1\,.$$

4 Introduction aux parties de $\mathbb{R}$

Exercice 15
Décrire (et mettre évidence sur un axe) les parties de $\mathbb{R}$ définies par les conditions suivantes :

1. $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$.
2. $x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$.
3. $(x \leq 0$ et $x > 1)$ ou $x = 4$.
4. $(x \geq 0) \Rightarrow (x \geq 2)$.

Exercice 16
Trouver tous les nombres réels qui vérifient les assertions suivantes.

1. $|2x+1| < |x+1|$.
2. $|2x-3| \geq 1$.
3. $|2x+1| < |x+1|$ et $|2x-3| \geq 1$.
4. $|2x+1| < |x+1|$ ou $|2x-3| \geq 1$.
5. $|2x-1| \geq |x-1|$.
6. $|2x-1| < 1$.
7. $|2x-1| \geq |x-1|$ et $|2x-1| < 1$.
8. $|2x-1| \geq |x-1|$ ou $|2x-1| < 1$.

Exercice 17
Définir en termes d'intervalles les ensembles suivants.

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| \leq |x^2-3|\}$.
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : |x^2-x-3| > x+1\}$.
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : |3x-|2x+1|| < 2\}$.

5 Exercices complémentaires

Exercice 18
Définir en termes d'intervalles les ensembles suivants.

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq |x+3|\}$.
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : |x^2-2x-3| > 2x+1\}$.
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : |x-|x+1|| < 2\}$.
4. $D = \{x \in \mathbb{R} : 2|x+1| \leq |x-8|\}$.
5. $E = \{x \in \mathbb{R} : 2|x+1| > |x-3|\}$.

Exercice 19
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f n'est pas une fonction constante.
4. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
5. La fonction f présente un minimum.
6. La fonction f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 20
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes :

1. $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$.
2. $\forall x \in I, (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$.
3. $\forall x \in I, \forall y \in I, \big(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\big)$.
4. $\forall x \in I, \forall y \in I, \big(x < y \Rightarrow f(x) > f(y)\big)$.

Exercice 21
Montrer par l'absurde que $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 22
Utiliser le fait que la somme et le produit de deux nombres rationnels est encore un nombre rationnel et l'exercice précédent pour démontrer que

1. $\forall q \in \mathbb{Q},\, q + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 23
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\, 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$$

Exercice 24
On considère les assertions suivantes :
$X : \forall x \in \mathbb{R},\, x > 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R},\, 0 < y < x)$.
$Z : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R},\, (x < y \text{ et } y < z) \Rightarrow x < y < z$.

1. Écrire leur négation.
2. Préciser si elles sont vraies ou fausses, puis les démontrer.

Exercice 25
On considère les assertions suivantes :
$(A)\ : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \big(x < y \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, x + \varepsilon < y\big)$.
$(B)\ : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \big([(0 \leq x \leq 2\pi) \text{ et } (0 \leq y \leq x)] \Rightarrow [e^{\cos(x)} = e^{\cos(y)} \Rightarrow x = y]\big)$.
$(C)\ : \forall x \in \mathbb{R},\, x > 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R},\, 0 < y < x)$.

1. Écrire leur négation et leur contraposée.
2. Préciser si elles sont vraies ou fausses, puis les démontrer.

Exercice 26
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes.

1. La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes.
2. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Exercice 27
On considère l'assertion suivante.
$(A)\ : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \big(x < y \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, x + \varepsilon < y\big)$.

1. Écrire sa négation et sa contraposée.
2. Préciser si elle est vraie ou fausse, puis le démontrer.

Exercice 28
On considère l'assertion suivante.
$Y\ : \forall x \in \mathbb{R}, [\exists y \in \mathbb{R}, y^2 < x \text{ ou } xy \leq 0]$.

1. Écrire sa négation.
2. Préciser si elle est vraie ou fausse, puis la démontrer.

Exercice 29
Montrer par récurrence : $2 + 4 + \cdots + (2n) = n^2 + n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 30
Montrer par récurrence : $2n < n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ à partir d'un entier n_0 que l'on donnera.

Exercice 31
Soient p, $n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. Rappelons que le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est défini par

$$\binom{n}{p} := \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Ce nombre a une interprétation importante : c'est le nombre des sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments. Démontrer, éventuellement par récurrence

1. (La formule de Pascal) :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2. (La formule itérée de Pascal) :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

où $n \geq p$. En déduire une formule explicite pour la somme $\sum_{k=1}^{n} k^p$ pour $p \in \{1, 2, 3\}$.

3. (La formule du binôme de Newton) : Soient x, $y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

En déduire les identités : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

4. (La formule du binôme de Van der Monde) : Soient m, n, $p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq m+n$. Alors

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}.$$

Indication : Utiliser l'identité $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$ *et la formule du binôme de Newton.*