

**Planche 2**  
Vocabulaire de la théorie des ensembles

## 1 Inclusion, égalité, réunion, intersection, complémentaire

Pour tout sous-ensemble  $X \subset E$  on dénote le complément  $E \setminus X$  par  ${}^cX$ .

### EXERCICE 1

Soit  $E = \{a, b, c, d\}$ . Pour chaque paire d'objets, déterminer si le premier appartient ( $\in$ ) ou pas ( $\notin$ ) ou alors s'il est contenu ( $\subset$ ) ou pas ( $\not\subset$ ) dans le deuxième.

- |                              |                            |                        |
|------------------------------|----------------------------|------------------------|
| 1. $a, E$ ;                  | 2. $E, E$ ;                | 3. $\{a\}, \{a, c\}$ ; |
| 4. $\{c\}, \{a, b\}$ ;       | 5. $\emptyset, \{b, c\}$ ; | 6. $b, \{a, c\}$ ;     |
| 7. $\{a, b\}, \{a, c, d\}$ . |                            |                        |

### EXERCICE 2

Déterminer toutes les inclusions et toutes les identités entre les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}, \quad B = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \text{ et } b \text{ pair}\}, \quad C = \{y \in \mathbb{R} : y^2 = -4\}, \quad D = \mathbb{Q}, \quad E = \emptyset.$$

### EXERCICE 3

Soient  $A, B, C$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ . Montrer les affirmations suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ . | 2. $A \subset B \Leftrightarrow {}^cB \subset {}^cA$ . |
| 3. ${}^c(A \cup B) = {}^cA \cap {}^cB$ .              | 4. ${}^c(A \cap B) = {}^cA \cup {}^cB$ .               |
| 5. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$        |  |

### EXERCICE 4

Expliciter les ensembles suivants :

$$E = \{x \in [0, 1] \mid \exists n \in \mathbb{N}^* : x < 1/n\}, \quad F = \{x \in [0, 1] \mid \forall n \in \mathbb{N}^* : x < 1/n\},$$
$$G = \{x \in [0, 1] \mid \exists n \in \mathbb{N}^* : x \geq 1/n\}, \quad H = \{x \in [0, 1] \mid \forall n \in \mathbb{N}^* : x \geq 1/n\}.$$

## 2 Ensemble des parties

### EXERCICE 5

- Donner une liste de tous les sous-ensembles de l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ . Même question pour l'ensemble  $\{a, b, c, d\}$ .
- Donner une liste de tous les éléments de l'ensemble  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0, 1\}))$ .

### EXERCICE 6

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.

- Comparer par inclusion  $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$  et  $\mathcal{P}(E \cap F)$ .
- Même question pour  $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$  et  $\mathcal{P}(E \cup F)$ .

## 3 Produit cartésien

### EXERCICE 7

Soient  $A, B, C, D$  les ensembles  $A = [1, 4]$ ,  $B = [3, 6]$ ,  $C = [2, 5]$  et  $D = \{2\}$ .

- Tracer dans  $\mathbb{R}$  les ensembles suivants :  $A \cup C$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus D$ .
- Tracer dans  $\mathbb{R}^2$  les ensembles suivants :  $(A \cap B) \times A$ ,  ${}^cB \times (A \cup C)$ ,  $(A \setminus D) \times D$ .

### EXERCICE 8

Montrer que  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$  ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de  $\mathbb{R}$ .

## 4 Exercices complémentaires

### EXERCICE 9

Soit  $[t, \infty[ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq t\}$ . Calculer  $A = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} [t, \infty[$  et  $B = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} [t, \infty[$ .

### EXERCICE 10

Soit  $E = \{a, b, c, d\}$ . Pour chaque paire d'objets, déterminer si le premier appartient ( $\in$ ) ou pas ( $\notin$ ) ou alors s'il est contenu ( $\subset$ ) ou pas ( $\not\subset$ ) dans le deuxième. Seules les réponses cohérentes sont demandées. Plusieurs réponses sont possibles.

- |                          |                                  |   |
|--------------------------|----------------------------------|---|
| 1. $a, \emptyset$ ;      | 2. $E, E$ ;                      | 3. $\{a\}, \{a, c\}$ ;                  |
| 4. $\{c\}, \{a, b\}$ ;   | 5. $\emptyset, \{b, c\}$ ;       | 6. $\emptyset, \{\emptyset, E\}$ ;      |
| 7. $E, \mathcal{P}(E)$ ; | 8. $\emptyset, \mathcal{P}(E)$ ; | 9. $\{\emptyset, E\}, \mathcal{P}(E)$ . |

### EXERCICE 11

Soient  $A, B, C$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ . Montrer les affirmations suivantes :

- $A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$ .
- Si  $A \cup B \subset A \cup C$  et  $A \cap B \subset A \cap C$  alors  $B \subset C$ . Que peut-on dire de l'autre implication réciproque?

### EXERCICE 12

Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles d'un ensemble fini  $E$ . On sait que 58% des éléments de  $E$  appartiennent à  $A$  et 78% à  $B$ . Que peut-on dire du pourcentage d'éléments de  $E$  qui appartiennent à  $A \cap B$ ?

### EXERCICE 13

- Montrer par récurrence qu'un ensemble à  $n$  éléments possède  $2^n$  sous-ensembles.
- Montrer par récurrence qu'un ensemble à  $n$  éléments possède  $\binom{n}{k}$  sous-ensembles ayant  $k$  éléments,  $k = 0, \dots, n$ . En déduire l'égalité  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .

### EXERCICE 14

Soient  $A, B \subset E$  et  $C, D \subset F$  des ensembles non vides.

- Montrer par double inclusion que  ${}^c(A \times C) = ({}^cA \times C) \cup (A \times {}^cC) \cup ({}^cA \times {}^cC)$ .
- Montrer que  $A \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D)$  et  $A \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (A \times D)$ .
- A-t-on les égalités suivantes?  $(A \cap B) \times (C \cap D) = A \times C \cap B \times D$ ;  $(A \cup B) \times (C \cup D) = A \times C \cup B \times D$ .

### EXERCICE 15

Soit  $E$  un ensemble. On appelle *topologie sur  $E$*  un sous-ensemble  $T$  de  $\mathcal{P}(E)$  satisfaisant : (i)  $\emptyset \in T$  et  $E \in T$ , (ii) si  $A, B \in T$  alors  $A \cap B \in T$ , (iii) si  $V \subset T$  alors  $\bigcup_{A \in V} A \in T$ . Pour les ensembles  $E$  suivants, montrer que le  $T$  spécifié est bien une topologie sur  $E$  :

- $E$  quelconque (non vide) et  $T = \{\emptyset, E\}$  (*topologie triviale*).
- $E$  quelconque (non vide) et  $T = \mathcal{P}(E)$  (*topologie discrète*).
- $E = \mathbb{N}$  et  $T = \{\{k \in \mathbb{N} : k \leq n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ .
- $E$  quelconque, non vide et  $T = \{A \subset E : {}^cA \text{ est un ensemble fini}\} \cup \{\emptyset\}$  (*topologie des compléments finis*).

### EXERCICE 16

Soit  $E$  un ensemble et soit  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ . Pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{P}(E)$ , on appelle différence symétrique de  $A$  par  $B$  l'ensemble, noté  $A \Delta B$ , défini par :  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

- Montrer que  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .
- Calculer  $A \Delta A$ ,  $A \Delta \emptyset$ ,  $A \Delta E$  et  $A \Delta {}^cA$ .
- Pour tous  $A, B$  et  $C$  dans  $\mathcal{P}(E)$  montrer :
  - ${}^c((A \cap {}^cB) \cup (B \cap {}^cA)) = ({}^cA \cap {}^cB) \cup (A \cap B)$ ;
  - $(A \Delta B) \Delta C = (A \cap {}^cB \cap {}^cC) \cup (B \cap {}^cC \cap {}^cA) \cup (C \cap {}^cA \cap {}^cB) \cup (A \cap B \cap C)$ ;
  - $A \Delta (B \Delta C) = (B \Delta C) \Delta A$ ;
  - $(A \Delta B) \Delta C = (B \Delta C) \Delta A$  (utiliser (b));
  - $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ .