

**Planche 3**  
Fonctions, applications

## 1 Domaines et compositions

### EXERCICE 1

On donne  $E = \{a, b, c, d\}$  et  $F = \{1, 2, 3, 4\}$ . Déterminer  $f(\{a, b, c\})$  et  $f^{-1}(\{1, 3\})$  pour les applications  $f : E \rightarrow F$  suivantes :

1.  $f(a) = 1, f(b) = 3, f(c) = 4, f(d) = 2$ ;
2.  $f(a) = f(b) = 2, f(c) = f(d) = 3$ ;
3.  $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 2$ .

### EXERCICE 2

On donne  $E = \{a, b, c, d\}$  et  $F = \{1, 2, 3, 4\}$ . Soient  $f$  et  $g$  les fonctions (au sens de « relation fonctionnelle ») de  $E$  dans  $F$  et de  $F$  dans  $E$  respectivement définies de la manière suivante :  $f(b) = 3, f(c) = 4, f(d) = 2$  et  $g(1) = a, g(2) = b, g(3) = c$ .

Déterminer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

### EXERCICE 3

Considérons les fonctions  $f$  et  $g$  données par les formules  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$  pour  $x$  réel.

1. Déterminer les plus grands sous-ensemble (au sens de l'inclusion) de  $\mathbb{R}$  sur lesquels les fonctions suivantes sont définies :  $f, g, f \circ g, g \circ f, f \circ f$  et  $g \circ g$ .
2. Calculer  $f \circ g, g \circ f, f \circ f$  et  $g \circ g$ . Conclure.

## 2 Image directe, image réciproque

### EXERCICE 4

On donne les fonctions réelles  $f$  et  $g$  en spécifiant  $f(x) = \sin(\pi x)$  et  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

1. Déterminer les domaines de définition de  $f, g, f \circ g$  et  $g \circ f$ .
2. Déterminer l'ensemble image (c'est-à-dire l'image de leur domaine de définition) de  $f, g, f \circ g$  et  $g \circ f$ .

### EXERCICE 5

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application, et soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

1. Démontrer que  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .
2. Démontrer que  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$  et trouver un exemple qui montre que l'inclusion peut être propre.

### EXERCICE 6

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application, et soient  $C$  et  $D$  deux parties de  $F$ .

1. Démontrer que  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ .
2. Démontrer que  $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ .

## 3 Injectivité, surjectivité et bijectivité

### EXERCICE 7

Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications. Montrer les implications suivantes :

1.  $f$  et  $g$  injectives  $\Rightarrow g \circ f$  est injective.
2.  $f$  et  $g$  surjectives  $\Rightarrow g \circ f$  est surjective.
3.  $g \circ f$  surjective  $\Rightarrow g$  est surjective. Trouver un exemple où  $f$  n'est pas surjective.
4.  $g \circ f$  injective  $\Rightarrow f$  est injective. Trouver un exemple où  $g$  n'est pas injective.

### EXERCICE 8

On considère l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ .

- Déterminer : (i)  $f([-1, 1])$ , (ii)  $\text{Im}(f)$ , (iii)  $f^{-1}([0, 1])$ , (iv)  $f^{-1}(]-\infty, 0])$ .
- L'application  $f$  est-elle injective, surjective, bijective?

### EXERCICE 9

Soit  $A$  un ensemble non vide et  $B$  l'ensemble des applications  $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ . On définit une application  $g : B \rightarrow \mathcal{P}(A)$  de la façon suivante :  $g(f) = f^{-1}(\{1\})$ .

- Montrer que  $g$  est une bijection.
- Que peut-on dire si  $A = \emptyset$ ?

## 4 Réciproque

### EXERCICE 10

Soit  $f : E \rightarrow E$  une bijection, et  $f^{-1}$  sa réciproque. Justifier que  $f \circ f$  est bijective et que  $(f \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ f^{-1}$ .

### EXERCICE 11

On considère l'application  $f : [-1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  définie par  $f(x) = (x + 1)^2$ . Montrer que  $f$  est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.

### EXERCICE 12

On considère l'application  $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$  définie par  $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ . Montrer que  $g$  est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.

### EXERCICE 13

On considère l'application  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h(x) = x^2 + 2x$ .

- Est-elle injective, surjective, bijective?
- Déterminer deux intervalles  $I$  et  $J$  tels que l'application  $\tilde{h} : I \rightarrow J$ , définie par  $\tilde{h}(x) = x^2 + 2x$  soit bijective. Déterminer l'expression de sa réciproque.

## 5 Exercices complémentaires

### EXERCICE 14

Choisir et représenter graphiquement une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie :

- $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$ .
- $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$ .
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ .
- $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) < x$ .

### EXERCICE 15

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle. Exprimer formellement (en langage mathématique) chacune des affirmations suivantes sur  $f$  et sa négation. Dans chaque cas trouver un exemple de fonction qui vérifie l'affirmation et un exemple de fonction qui vérifie sa négation.

- La fonction  $f$  est majorée.
- La fonction  $f$  est bornée.
- La fonction  $f$  ne s'annule jamais.
- La fonction  $f$  est croissante.
- La fonction  $f$  est décroissante et positive.
- La fonction  $f$  est périodique.
- Les valeurs de la fonction  $f$  sont  $\leq 1$ .
- Il existe  $x \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f(x) \leq 0$ .
- Il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que quel que soit  $y \in \mathbb{R}$ , si  $x < y$  alors  $f(x) > f(y)$ .

### EXERCICE 16

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application, et soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

- Démontrer que  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  si  $f$  est injective.

2. Démontrer que si  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  pour toutes parties  $A, B \subset E$ , alors  $f$  est injective.

### EXERCICE 17

L'application suivante est-elle injective, surjective, bijective?

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

### EXERCICE 18

Soit  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  une application d'un ensemble  $A$  vers son ensemble des parties  $\mathcal{P}(A)$ . On définit l'ensemble de Cantor associé à  $f$ , noté  $\mathcal{C}_f$ , par :

$$\mathcal{C}_f := \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

1. Montrer que pour tout  $a \in A$  on a l'inégalité  $f(a) \neq \mathcal{C}_f$ .
2. En déduire qu'il n'existe aucun ensemble  $A$  qui admet une application surjective  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ .
3. Montrer le même énoncé pour  $A$  fini en utilisant les faits connus (voir l'exercice 10, question 3, de la planche TD2) concernant la cardinalité de  $A$  et  $\mathcal{P}(A)$ .
4. Discuter une possible définition de  $\text{card}(A)$  pour les ensembles infinis  $A$ .

### EXERCICE 19

Soit  $f : E \rightarrow E$  une application et soient  $A \subset E$  et  $B \subset F$  des sous-ensembles.

1. Montrer que  $A \mapsto f(A)$  définit une application  $\mathcal{P}f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$ .
2. Montrer que  $B \mapsto f^{-1}(B)$  définit une application  $\mathcal{P}f^{-1} : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ .
3. Donner une preuve ou trouver un contre-exemple pour  $\mathcal{P}f \circ \mathcal{P}f^{-1} = \text{id}_{\mathcal{P}(F)}$ .
4. Donner une preuve ou trouver un contre-exemple pour  $\mathcal{P}f^{-1} \circ \mathcal{P}f = \text{id}_{\mathcal{P}(E)}$ .

### EXERCICE 20

On considère les fonctions réelles  $f_n$  (où  $n = 1, \dots, 5$ ) suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} 1/x, & x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases} & f_2(x) &= \begin{cases} x, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0, & x > 2\pi \end{cases} \\ f_3(x) &= \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ \ln x, & x \geq e \end{cases} & f_4(x) &= \begin{cases} (x-1)/(x^2+1), & x < 0 \\ x^2+1, & x \geq 0 \end{cases} \\ f_5(x) &= |x - 2k| \text{ où } k \in \mathbb{Z} \text{ est l'unique valeur telle que } x \in ]2k-1; 2k+1]. \end{aligned}$$

Pour chacune de ces fonctions :

1. donner l'ensemble de définition et spécifier s'il s'agit d'une application ;
2. dessiner le graphe ;
3. établir si la fonction est (a) injective, (b) surjective, (c) bijective ; si elle est bijective, donner l'application réciproque ; si elle est injective donner la fonction réciproque dont on spécifiera l'ensemble de définition ;
4. déterminer  $f^{-1}(\{0\})$ ,  $f^{-1}([0, 1])$  et  $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$  ;
5. dire si, sur son ensemble de définition, la fonction est : majorée, minorée, bornée, monotone (en spécifiant quel type), périodique.

### EXERCICE 21

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  avec  $A \subset E$  et  $B \subset F$ . Donner les définitions de  $f(A)$ ,  $f^{-1}(B)$ ,  $f(f^{-1}(B))$  et  $f^{-1}(f(A))$ .

### EXERCICE 22

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  avec  $A \subset E$  et  $B \subset F$ .

1. Montrer que  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .
2. Donner  $f^{-1}(B)$  quand  $f = \sin$ , et  $B = ]-1/2; 1/2[$  ( $E = F = \mathbb{R}$ ).

### EXERCICE 23

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  avec  $X \subset E$  et  $Y \subset F$ .

1. Montrer que  $X \subset f^{-1}(f(X))$ .

2. Donner  $f(f^{-1}(Y))$  quand  $f = \tan$ , et  $Y = ]0; 1[$  ( $E = ] - \pi/2; \pi/2[$  et  $F = \mathbb{R}$ ).

#### EXERCICE 24

Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications.

1. Donner la définition d'une application injective.
2. Montrer que  $g \circ f \Rightarrow f$  est injective.  
Donner un exemple où  $g \circ f$  est injective mais pas  $g$ .

#### EXERCICE 25

Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications.

1. Donner la définition d'une application surjective.
2. Montrer que  $g \circ f$  surjective  $\Rightarrow g$  est surjective.  
Donner un exemple où  $g \circ f$  est surjective mais pas  $f$ .

#### EXERCICE 26

Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications.

1. Donner la définition d'une application bijective.
2. Montrer que  $f$  et  $g$  bijectives  $\Rightarrow g \circ f$  est bijective.

#### EXERCICE 27

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ .

1. Montrer que  $f$  est ni injective, ni surjective.
2. Donner les plus grands sous-ensembles  $E$  et  $F$  de  $\mathbb{R}$  tels que la fonction  $g : E \rightarrow F$  définie par  $g(x) = \ln(x^2 + 1)$  soit bijective. Justifier soigneusement et donner sa fonction inverse (réciproque).

#### EXERCICE 28

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = e^{x^2+1}$ .

1. Montrer que  $f$  est ni injective, ni surjective.
2. Donner les plus grands sous-ensembles  $E$  et  $F$  de  $\mathbb{R}$  tels que la fonction  $g : E \rightarrow F$  définie par  $g(x) = e^{x^2+1}$  soit bijective. Justifier soigneusement et donner sa fonction inverse (réciproque).

#### EXERCICE 29

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ .

1. Montrer que  $f$  est ni injective, ni surjective.
2. Donner les plus grands sous-ensembles  $E$  et  $F$  de  $\mathbb{R}$  tels que la fonction  $g : E \rightarrow F$  définie par  $g(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$  soit bijective. Justifier soigneusement et donner sa fonction inverse (réciproque).