1 Exercices sur les fonctions récursives

1.1 Exercices sur les fonctions récursives primitives

Exercice 1.1 Soit $g : \mathbb{N}^3 \mapsto \mathbb{N}$ une fonction primitive récursive. Soit $h : \mathbb{N}^4 \mapsto \mathbb{N}$ définie par $h(x, y, z, u) = g(x, y, z)$ et $k : \mathbb{N}^3 \mapsto \mathbb{N}$ définie par $k(x, y, z) = g(z, y, x)$. Montrer que h et k sont primitives récursives. Généralisation ? Conclusion ?

Exercice 1.2 On suppose que $h : \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}$ et $k : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ sont des fonctions p.r., $a \in \mathbb{N}$. Soient $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $f(0) = a$, $f(n+1) = h(n, f(n))$ et $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $g(0) = a$ et $g(n+1) = k(g(n))$. Les fonctions f et g sont-elles récursives primitives ?

Exercice 1.3 Montrer que les fonctions suivantes sont p.r. :

1. $\mathrm{Id}(x) = x$;
2. $\mathrm{Add}(x, y) = x + y$;
3. $\mathrm{Mult}(x, y) = x.y$;
4. $C_k(x) = k$ (k fixé) ;
5. $!(x) = 1.2....x$;
6. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ où f et g sont p.r.
7. $f * g(x) = f(x).g(x)$ où f et g sont p.r.
8. $\mathrm{Exp}(x, y) = x^y$;
9. $\mathrm{Pred}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$
10. $\mathrm{Moins}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq y, \\ x - y & \text{sinon.} \end{cases}$
11. $\mathrm{Zero}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$
12. $\mathrm{nonzero}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$
13. $\mathrm{Kr}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 1.4 Soit R une relation n-aire. Notons χ_R sa fonction caractéristique usuelle, définie par :

$$\chi_R(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_1, \ldots, x_n) \in R, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Soit g_R définie par : $g_R(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si $(x_1, \ldots, x_n) \in R$, 1 sinon. Est-ce-que χ_R est récursive primitive ssi g_R est récursive primitive ?
2. Soit h_R une fonction totale vérifiant $h_R(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ssi $(x_1, \ldots, x_n) \in R$. Est-ce-que χ_R est récursive primitive ssi h_R est récursive primitive ?

Exercice 1.5 Les relations sur $\mathbb{N}^2$ suivantes sont-elles récursives primitives ? $\leq$, $<$, $\geq$, $>$, $=$.

Exercice 1.6 Soit R une relation n-aire récursive primitive, $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions récursives primitives. Montrer que : $R(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$ est une relation récursive primitive.

Exercice 1.7 Soit $R(x_1,\ldots,x_n,x)$ et $f(x_1,\ldots,x_n)$ une relation et une fonction p.r. Montrer que : $S(x_1,\ldots,x_n) \equiv \forall x \leq f(x_1,\ldots,x_n), R(x_1,\ldots,x_n,x)$ et que $S(x_1,\ldots,x_n) \equiv \exists x \leq f(x_1,\ldots,x_n), R(x_1,\ldots,x_n,x)$ sont p.r.

Exercice 1.8 Les fonctions ou relations suivantes sont-elles récursives primitives ?

1. $D(x,y) = \begin{cases} \text{partie entière de } x/y & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. $\surd x =$ partie entière de $\sqrt{x}$;
3. $\sum(x) = 0+1+2+\cdots x$:
4. la relation $\mathrm{Div}(x,y)$: « x divise y » ;
5. les prédicats « x est pair », « x est impair », « x est premier », « x est un nombre magique (égal à la somme de ses diviseurs) » ;
6. $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par : $f(x) = 2x$ si x est un carré, $2x+1$ sinon ;
7. $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par : $g(x) =$ la somme de ses diviseurs si $x \neq 0$, 0 sinon ;
8. $\Pi(x) =$ le nombre de nb premiers $\leq x$;
9. La relation « x est la somme de 2 carrés » ;
10. $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ telle que : $f(n) =$ le n-ième nombre premier :
11. $h : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $h(x) = \surd 2x$.

Exercice 1.9 Soient $f, g, h : \mathbb{N}^n \mapsto \mathbb{N}$ des fonctions p.r. Est-ce-que $k : \mathbb{N}^n \mapsto \mathbb{N}$ définie par :

$$k(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} f(x_1,\ldots,x_n) & \text{si } h(x_1,\ldots,x_n) = 0, \\ g(x_1,\ldots,x_n) & \text{sinon} \end{cases}$$

est p.r. ?

Exercice 1.10 Soit f une fonction p.r., k un entier non nul, $a_1,\ldots,a_k$ des entiers. Les fonctions g et h définies par :

- $g(0) = a_0$, $g(1) = a_1$, ..., $g(k) = a_k$ et $g(x) = f(x)$ pour $x > k$;
- $h(0) = a_0$, $h(1) = a_1$, ..., $h(k) = a_k$ et $h(n+1) = f(h(n))$ pour $n > k$;

sont elles p.r. ?

Exercice 1.11 (Fonctions de codage) On dit qu'une fonction $g : \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}$ est une *fonction de codage* si g est bijective et croissante en chaque argument, c'est à dire : $\forall x, y, g(x,y) < g(x+1,y)$ et $g(x,y) < g(x,y+1)$.

1. Décider si les fonctions ci-dessous sont des fonctions de codage.
   - $g_1(x,y) = 2^x.(2y+1) - 1$;
   - $g_2(x,y) = 2^x.3^{y.x}$;
   - $g_3(x,y) = (x+y)(x+y+1)/2 + y$;
   - $g_4(x,y) = (E((x+1)/2+y)^2 + x$ ($E(x)$ est la partie entière de x).
2. Pour chaque fonction de codage trouvée :
   (a) définir les fonctions réciproques (appelées aussi fonction de décodage) π_1 et π_2 vérifiant $g(\pi_1(x), \pi_2(x)) = x$;
   (b) la fonction g_i et ses réciproques sont-elles p.r. ?

Exercice 1.12 On appelle *fonction de Fibonacci* la fonction $F : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par : $F(0) = F(1) = 1$; $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$. Montrer que la fonction de Fibonacci est récursive primitive.

Exercice 1.13 A l'aide d'une fonction de codage $C : \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}$, et des fonctions de décodage π_1 et π_2, montrer que l'on peut définir des fonctions de codage entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^m$ pour $m \geq 2$.

Exercice 1.14 Soit $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ un ensemble à k éléments (A est appelé un alphabet). Soit A^* l'ensemble des suites finies d'éléments de A (on dit qu'un élément m de A^* est un mot de A, il sera noté : $m = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_p}$; quand $p = 0$, on dit que m est le mot vide et on le note ϵ).

Soit l'application Cod : $A^* \mapsto \mathbb{N}$, définie par $\mathrm{Cod}(\epsilon) = 0$, $\mathrm{Cod}(x_1 x_2 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} (j_i) k^{i-1}$ (où j_i est l'indice tel que $a_{j_i} = x_i$)

1. Pour $k = 3$, calculer $\mathrm{Cod}(a_3 a_1 a_3 a_2 a_3)$ et $\mathrm{Cod}(a_1 a_3 a_3 a_3 a_2)$.
2. Comparer $n = \mathrm{Cod}(x_1, \ldots, x_n)$ et l'écriture en base 3 de n.
3. Décoder $n = 441$.
4. Décrire les algorithmes de codage et décodage.
5. En déduire que Cod est bijective.

1.2 Exercices sur les fonctions partielles récursives

Exercice 1.15 Un entier p est appelé double-premier si p et $p - 2$ sont premiers. Il est largement admis mais non prouvé qu'il y a une infinité de double-premiers.

Soit T la fonction sur $\mathbb{N}$ définie par : $T(n)$ est le n-ième nombre double premier.

Montrer que T est une fonction partielle récursive (totale si la conjecture est vraie).

Exercice 1.16 (La fonction d'Ackermann) Soit $A : \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}$ la fonction définie par :

$$A(0, p) = p + 1$$
$$A(n + 1, 0) = A(n, 1)$$
$$A(n + 1, p + 1) = A(n, A(n + 1, p))$$

Notons A_n la fonction de $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $A_n(p) = A(n, p)$.

Démontrer les propriétés suivantes :

1. A_0, A_1, A_2 et A_3 satisfont : $A_0(n) = n + 1$, $A_1(n) = n + 2$, $A_2(n) = 2n + 3$ et $A_3(n) = k2^n + c$ (k et c à déterminer).
2. $\forall n, \forall x, A_n(x) > x$.
3. Pour tout n les fonctions A_n sont strictement croissantes.
4. $\forall n, \forall x, A_{n+1}(x) \geq A_n(x)$.
5. $\forall n, \forall x, A_{n+1}(x) \geq A_n(x + 1)$
6. $\forall n_1, \forall n_2, \exists m, \forall x, A(n_1, A(n_2, x)) \leq A(m, x)$.
7. $\forall n_1, \forall n_2, \exists m, \forall x, A(n_1, x) + A(n_2, x) \leq A(m, x)$.
8. Soient m un entier et f une fonction ; on dira que f est m-bornée ssi

   $$\forall x_1, \ldots, x_p, f(x_1, \ldots, x_p) \leq A(m, x_1 + \cdots + x_p)$$

   Si l'on note $\mathcal{M} = \{f \text{ telle que } \exists m, f \text{ est } m\text{-bornée}\}$, montrer que $\mathcal{M}$ contient l'ensemble des fonctions récursives primitives.
9. En déduire que A n'est pas récursive primitive.