

Ces notes sont fortement inspirées du support officiel du cours, à savoir le livre « Mathématiques pour le DEUG, Analyse 2^{ème} année » de François Liret et Dominique Martinais (chez Dunod).
Attention : ces notes sont dans un état encore préliminaire, c'est à dire qu'il est probable qu'elles contiennent des erreurs. Le lecteur est invité à vérifier soigneusement les énoncés établis ci-dessous

Chapitre 1

Séries Numériques

Intuition. Une série est une somme infinie de nombres (réels, complexes). Par exemple la distance parcourue par Achille pour attraper la tortue est :

$$100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = 111,111\dots = \frac{1000}{9}$$

Attention, ça n'est qu'une intuition, pas une définition mathématique. La notion de somme infinie n'a pas de sens, comme le montre l'exemple suivant :

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$$

puisque selon la manière dont on « calcule » elle vaut 0, 1, $\frac{1}{2}$... En vérité on ne peut pas la calculer.

1.1 Définitions et propriétés de base

1.1.1 Définition (Série)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Pour chaque $p \geq 0$ notons s_p la somme partielle des u_n jusqu'au rang p , c'est à dire :

$$s_p = \sum_{n=0}^p u_n.$$

On appelle série de terme général u_n la suite $(s_p)_{p \geq 0}$ des sommes partielles.

Cette série est notée $\sum_{n \geq 0} u_n$ ou encore plus simplement $\sum u_n$. On dit que $\sum u_n$ converge si la suite des sommes partielles a une limite, ce que l'on note parfois $\sum u_n \downarrow$. Dans le cas contraire on dit que la série diverge ce que l'on note $\sum u_n \uparrow$. Lorsque la série converge, sa limite est également notée $\sum_{n \geq 0} u_n$.

REMARQUE

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est la même que la série $\sum_{k \geq 0} u_k$.

REMARQUE

On peut également renuméroter : par définition la série $\sum_{n \geq d} u_n$ où d est un entier non nul est la série et $\sum_{n \geq 0} u_{n+d}$. Tous les théorèmes qui sont énoncés pour des séries commençant en 0 sont évidemment valables pour des séries commençant en d .

REMARQUE

Le terme $\sum_{n \geq 0} u_n$ désigne deux choses bien distinctes : la série elle-même qui est une suite de nombres, ou sa limite si celle-ci existe qui est un nombre. S'il y a ambiguïté on prendra bien garde de spécifier de quoi on parle en disant « la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ » ou « le nombre $\sum_{n \geq 0} u_n$ ». On ne prendra toutefois pas cette peine si le contexte est clair : par exemple si on écrit $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1}/n = \log 2$ il est clair que l'on désigne ici la limite de la série ; par contre chaque fois que l'on dit que $\sum_{n \geq d} u_n$ converge, on fait référence à la série, car cela n'a pas de sens de dire qu'un nombre converge.

1.1.1 Théorème

La série $\sum_{n \geq 0}$ converge ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall p, q, \text{ si } p \geq q \geq N \text{ alors } \left| \sum_{n=q}^p u_n \right| < \epsilon$$

1.1.2 Théorème

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de nombres réels positifs. Alors on a

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge ssi } \sum_{n \geq 0} 2^n u_{2^n} \text{ converge.}$$

EXEMPLE.

La *série harmonique* est la série $\sum_{n \geq 1} 1/n$. C'est un corollaire immédiat du théorème précédent qu'elle diverge. C'est l'exemple canonique d'une série dont le terme général tend vers 0, mais qui diverge.

EXEMPLE.

La série $\sum_{n \geq 1} 1/(n \log n)$ diverge. C'est une conséquence du théorème et de l'exemple précédent. En fait on peut itérer et voir que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \times \log n \times \log \log n \times \cdots \times \underbrace{\log \log \dots \log n}_{k \times}}$$

diverge pour n'importe quelle valeur de l'entier k .

1.1.3 Théorème

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite. Si la série $\sum u_n$ converge alors u_n tend vers 0 avec n .

REMARQUE

Autrement dit, pour qu'une série converge, il faut que son terme général tende vers 0. Attention, la réciproque est fautive, c'est à dire qu'il ne suffit pas en général que le terme général tende vers 0 pour que la série converge (comme le montrent les deux exemples précédents).

Ce théorème induit tout de même un critère simple dans l'étude des séries. La première question à se poser est : « le terme général tend-il vers 0 ? ». Si la réponse est non alors, d'après le théorème, la série diverge. Si la réponse est oui, il faut se poser d'autres questions..

1.1.4 Théorème

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors pour tout entier p la série $\sum_{n \geq p} u_n$ converge et de plus la suite de nombres $(\sum_{n \geq p} u_n)_{p \geq 0}$ tend vers 0.

1.1.5 Théorème (Linéarité des séries)

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites de nombres. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors la série $\sum u_n + v_n$ converge et sa limite est :

$$\sum_{n \geq 0} u_n + v_n = \sum_{n \geq 0} u_n + \sum_{n \geq 0} v_n$$

Soit λ un nombre réel ou complexe; si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum \lambda u_n$ converge également et sa limite est :

$$\sum_{n \geq 0} \lambda u_n = \lambda \sum_{n \geq 0} u_n$$

Si de plus λ est non nul, alors la réciproque est vraie, c'est à dire si $\sum \lambda u_n$ converge alors $\sum u_n$ converge également.

Si les u_n sont des nombres complexes, alors en notant x_n et y_n les parties réelles et imaginaires de u_n (de façon à ce que $u_n = x_n + iy_n$) on a : $\sum u_n$ converge ssi $\sum x_n$ converge et $\sum y_n$ converge; dans ce cas :

$$\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} x_n + i \sum_{n \geq 0} y_n$$

EXEMPLE.

La série $\sum_{n \geq 1} 1/2n$ diverge, car son terme général est $(1/2)(1/n)$ et on a vu que la série de terme général $1/n$ diverge.

1.1.6 Théorème (Convergence dominée)

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites de nombres réels. On suppose que pour tout n on a :

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge; si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.

EXEMPLE.

La série $\sum_{n \geq 1} 1/(2n - 1)$ diverge, car $1/(2n - 1) \geq 1/2n \geq 0$ et on a vu que la série $\sum 1/2n$ diverge.

EXEMPLE.

Sachant que la série $\sum_{n \geq 0} 1/n!$ converge (voir plus bas), comme $n^n \geq n!$ (pourquoi?), c'est à dire $1/n^n \leq 1/n!$, on en déduit que $\sum 1/n^n$ converge.

1.1.7 Théorème

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombre réels positifs. Alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ssi il existe M tel que toutes les sommes partielles sont majorées par M , c'est à dire :

$$\forall p, \sum_{n=0}^p u_n \leq M$$

REMARQUE

L'hypothèse que les u_n sont positifs est fondamentale. Par exemple si on prend $u_n = (-1)^n$, alors les sommes partielles sont majorées par 1 (et minorées par 0), mais la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ ne converge pas.

1.1.2 Définition (Convergence absolue)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument si la série des valeurs absolues $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

1.1.8 Théorème (Convergence absolue)

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

REMARQUE

Attention. La réciproque est fautive : une série qui ne converge pas absolument peut néanmoins converger. L'exemple canonique est la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} (-1)^n/n$ qui converge, mais qui ne converge pas absolument puisque la série des valeurs absolues est la série harmonique.

EXEMPLE.

Soit la série de terme général $u_n = (\cos nx)/n^2$. Comme $|\cos nx| \leq 1$, on a $|u_n| \leq 1/n^2$; or la série $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$ converge (voir la série de Riemann ci-dessous), donc la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument.

1.2 Quelques séries importantes

La série harmonique. Comme on a vu c'est la série $\sum_{n \geq 1} 1/n$ et elle ne converge pas.

La série géométrique. C'est la série de terme général x^n , où x est un réel ou un complexe. La série géométrique converge ssi $|x| < 1$ et dans ce cas sa limite est :

$$\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

La série harmonique paramétrée. C'est la série $\sum x^n/n$ pour x réel. Elle converge pour $-1 \leq x < 1$ et dans ce cas on a :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$$

Dans le cas particulier où $x = -1$, on l'appelle *série harmonique alternée* et c'est l'exemple canonique d'une série convergente mais pas absolument convergente.

La série factorielle, ou exponentielle. C'est la série de terme général $x^n/n!$. Elle converge *pour toute valeur réelle ou complexe de x* et on a :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

La série de Riemann. C'est la série $\sum_{n \geq 1} 1/n^\alpha$ où α est un nombre réel. Elle converge ssi $\alpha > 1$.

1.3 Critères de convergence

1.3.1 Théorème (d'Alembert)

Soit u_n une suite de nombres réels positifs non nuls tels que il existe $K < 1$ majorant u_{n+1}/u_n pour tout n , c'est à dire :

$$\forall n, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq K$$

Alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Si on suppose de plus que u_{n+1}/u_n tend vers une limite l avec n alors :

si $l < 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge;
si $l > 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

EXEMPLE.

Pour tout entier k , la série $\sum_{n \geq 0} n^k x^n$ converge absolument dès que $|x| < 1$ et diverge dès que $|x| > 1$.
En effet $|(n+1)^k x^{n+1}| / |n^k x^k| = ((n+1)/n)^k |x|$ tend vers $|x|$ avec n .

1.3.2 Théorème (Cauchy)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombre réels positifs. Supposons que $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite l avec n . Alors :

- si $l < 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ;
- si $l > 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

EXEMPLE.

La série $\sum_{n \geq 0} x^n/n^n$ converge car $\sqrt[n]{x^n/n^n} = x/n$ tend vers 0 avec n .

1.3.3 Lemme

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites de nombres réels positifs. Supposons que u_n/v_n a une limite non nulle ; alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ssi $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge.

EXEMPLE.

Prenons $u_n = \sin 1/2^n$ et $v_n = 1/2^n$. On sait que $(\sin x)/x$ tend vers 1 quand x tend vers 0 donc u_n/v_n tend vers 1 avec n . Comme $\sum_{n \geq 1} 1/2^n$ converge, il en de même de $\sum_{n \geq 1} \sin 1/2^n$.

1.3.4 Théorème (Riemann)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs et α un nombre réel positif.

- Si $n^\alpha u_n$ a une limite l non nulle, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ssi $l < 1$;
- si $n^\alpha u_n$ tend vers 0 avec n alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge dès que $\alpha > 1$;
- si nu_n tend vers l'infini alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

EXEMPLE.

La série $\sum_{n \geq 1} (\log n)/n^2$ converge car $n^{3/2}(\log n)/n^2 = (\log n)/n^{1/2}$ tend vers 0 ; la série $\sum_{n \geq 1} 1/(\sqrt{n} \log n)$ diverge car $n(1/(\sqrt{n} \log n)) = \sqrt{n}/\log n$ tend vers l'infini.

Le théorème de Riemann fournit une méthode puissante pour étudier la convergence des séries : on considère un développement limité de u_n vu comme fonction de $1/n^\alpha$ où $\alpha > 0$; c'est à dire que l'on écrit $u_n = a_0 + a_1/n^\alpha + a_2/n^{2\alpha} + \dots + a_k/n^{k\alpha} + \epsilon_n/n^{k\alpha}$ où (ϵ_n) est une suite qui tend vers 0. Si on arrive à trouver k tel que : a_0, \dots, a_{k-1} sont tous nuls et $k\alpha > 1$ alors on peut appliquer le théorème et déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

EXEMPLE.

Soit $u_n = 1/n - \sin(1/n)$. Le développement limité à l'ordre 3 de $\sin x$ est $\sin x = x - x^3/6 + x^3\epsilon(x)$ où $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Donc $u_n = 1/n^3(1/6 - \epsilon(1/n))$ et $n^2 u_n = 1/n(1/6 - \epsilon(1/n))$ tend vers 0 avec n . Par conséquent, comme $2 > 1$, la série converge.

Soit maintenant $u_n = 1/\sqrt[3]{n} - \sin(1/\sqrt[3]{n})$. On utilise encore le développement limité à l'ordre 3 de \sin ce qui nous donne $u_n = 1/n(1/6 - \epsilon(1/\sqrt[3]{n}))$ donc $nu_n = 1/6 - \epsilon(1/\sqrt[3]{n})$ tend vers $1/6$ qui est non nul. Comme on est dans le cas $\alpha = 1$, la série diverge.

Chapitre 2

Intégrale de Riemann

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ peut-être vue comme deux choses :

- c'est l'aire sous la courbe de la fonction f entre les points a et b ;
- c'est la différence $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f , c'est à dire une fonction telle que $F'(x) = f(x)$ pour $x \in [a, b]$.

Toutefois aucune de ces deux idées n'est vraiment une définition puisque la première repousse le problème à celui de définir l'*aire*, et la seconde n'a de sens que si l'on admet l'existence d'une primitive de f . On va donc va construire explicitement une notion d'intégrale. On s'appuie pour cela sur la première idée : l'intégrale est une aire. On commence par définir l'intégrale d'une fonction en escalier, ce qui n'est pas très difficile car, vue comme aire, c'est une somme de rectangles, puis l'intégrale d'une « bonne fonction » f (en un sens que l'on précisera), comme la « limite » des intégrales de fonctions en escalier « approximant » f . Le propos est donc de définir proprement les termes entre guillemets ; avec en particulier le souci que la classe des « bonnes fonctions » soit suffisamment large, et en particulier contienne les fonctions continues. On finit en démontrant que l'intégrale d'une fonction continue est, comme attendue, une primitive de cette fonction, ce qui nous fournit le théorème d'existence des primitives des fonctions continues.

Le problème de définir rigoureusement une bonne notion d'intégrale est assez difficile, et, bien qu'il occupe les mathématiciens depuis longtemps, il n'a trouvé de solution satisfaisante (pour un mathématicien d'aujourd'hui) que récemment à l'échelle de l'histoire des mathématiques (c'est à dire au cours des deux ou trois derniers siècles, selon ce qu'on entend par « satisfaisant »). On va voir l'une de ces solutions, attribuée à Riemann, et l'on pourra constater que si celle-ci colle au schéma exposé ci-dessus, elle nécessite tout de même un peu de travail.

Une remarque sur la notation : $\int_a^b f(t) dt$. Cette notation est basée sur l'intuition d'aire. Le signe \int rappelle la lettre *s* initiale du mot « somme » et l'expression peut se lire « faire la somme des valeurs de f entre a et b multipliées par la longueur dt d'un petit intervalle autour de t », c'est à dire sommer les aires de petits rectangles de base un petit intervalle de longueur dt autour de t et de hauteur $f(t)$. En supposant dt « infiniment petit », cette somme (infinie) représente bien l'aire sous la courbe de f .

Dans ce chapitre on ne considère que des fonctions définies sur un intervalle non vide de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} . En particulier lorsqu'on dira que f est définie sur $[a, b]$, on supposera toujours sans le dire que $a < b$ (et pareillement si f est définie sur $]a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b[$).

2.1 Fonctions constantes par morceaux

2.1.1 Définition (Subdivision, fonctions constantes par morceaux)

Une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ est une suite finie de réels (x_0, \dots, x_n) telle que :

- $x_0 = a, x_n = b$;

- $x_i < x_{i+1}$ pour $i = 0, \dots, n-1$.

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction et $s = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On dira que s est adaptée à f si on a :

$$\forall i = 0, \dots, n-1, \forall x, y \in]x_i, x_{i+1}[, f(x) = f(y)$$

c'est à dire f est constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[$. Si $x \in]x_i, x_{i+1}[$ alors $f(x)$ est appelée la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$.

Une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sera dite constante par morceaux, ou étagée, ou en escalier, si il existe une subdivision de $[a, b]$ adaptée pour f .

EXEMPLES.

La fonction $x \mapsto x$ sur l'intervalle $[0, 1]$ n'est pas constante par morceaux ; non plus que la fonction $\sin : [-\pi, \pi] \mapsto [-1, 1]$.

La fonction caractéristique de \mathbb{Q} définie par :

$$\chi_{\mathbb{Q}}(r) = 1 \text{ si } r \text{ est rationnel, } 0 \text{ sinon}$$

n'est pas constante par morceaux sur l'intervalle $[0, 1]$.

La fonction $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 1/n \text{ si } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}$$

et $f(0) = 0$, n'est pas constante par morceaux.

La fonction $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 1/2$ et $f(1/2) = 1$ est constante par morceaux.

2.1.2 Définition

Soit f une fonction constante par morceaux sur $[a, b]$ et $s = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f . L'intégrale de f relativement à s est par définition :

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$$

où pour chaque i , m_i est la valeur de f sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.

2.1.1 Théorème

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et s, s' deux subdivisions adaptées à f . Alors les intégrales de f relativement à s et à s' sont égales.

En vertu de ce théorème, si f est constante par morceaux sur $[a, b]$ on appellera simplement *intégrale de f sur $[a, b]$* l'intégrale de f relativement à n'importe quelle subdivision adaptée. Cette intégrale est notée $\int_a^b f(t) dt$.

2.1.2 Théorème

Soit f et g deux fonctions constantes par morceaux sur $[a, b]$, et λ un nombre réel. On a alors :

- $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$;
- $\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$;
- si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$;
- pour tout $c \in [a, b]$ on a $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.

REMARQUE

La dernière proposition implique en particulier que $\int_a^a f(t) dt = 0$.

2.2 Intégrale de Riemann

2.2.1 Définition (Fonction intégrable au sens de Riemann)

Soit f une fonction de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On dira que f est intégrable au sens de Riemann, ou que f est Riemann-intégrable, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier u et U sur $[a, b]$ telles que :

$$u(x) \leq f(x) \leq U(x) \text{ pour tout } x \in [a, b];$$
$$\int_a^b (U(t) - u(t)) dt < \epsilon$$

REMARQUE

Dans cette définition on utilise le fait que si U et u sont constantes par morceaux, alors il en est de même de $U - u$. Remarquons également que comme $u(x) \leq U(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, les valeurs de $U - u$ sur tout intervalle de toute subdivision adaptée à $U - u$ sont positives, si bien que $\int_a^b (U(t) - u(t)) dt$ est positive.

EXEMPLE.

La fonction caractéristique de \mathbb{Q} n'est pas Riemann-intégrable. Par contre toute fonction f en escalier est Riemann-intégrable : il suffit de prendre $u = U = f$ pour n'importe quel ϵ .

La fonction $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f(0) = 0, f(x) = n \text{ si } x \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$$

n'est pas Riemann-intégrable.

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. Notons A l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier plus petites que f :

$$A = \left\{ \int_a^b u(t) dt, u \text{ est une fonction en escalier et } u(x) \leq f(x) \text{ pour tout } x \in [a, b] \right\}$$

Similairement notons B l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier plus grandes que f . Les ensembles A et B sont donc des ensembles de réels (qui peuvent être vides, si par exemple f n'est pas bornée).

2.2.1 Théorème

Avec les hypothèses ci-dessus, si f est Riemann-intégrable alors :

- A et B sont non vides ;
- pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$ on a $x \leq y$; en particulier A est majoré et B est minoré, donc A a une borne supérieure $\sup A$ et B a une borne inférieure $\inf B$;
- de plus $\sup A = \inf B$.

Par définition le nombre $\sup A = \inf B$ est l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$; on le note également $\int_a^b f(t) dt$.

REMARQUE

Si f est une fonction en escalier alors on a vu que f est Riemann-intégrable. On a donc deux définitions de l'intégrale de f , en tant que fonction en escalier et en tant que fonction Riemann-intégrable. Comme attendu, ces deux intégrales sont égales.

Si f est une fonction quelconque on définit $\int_a^a f(t) dt = 0$. Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, on définit $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$.

2.2.2 Théorème

Soit f une fonction de $[a, b]$ dans \mathbb{R} et supposons qu'il existe deux suites de fonctions en escalier $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(U_n)_{n \geq 0}$ vérifiant :

- $u_n(x) \leq f(x) \leq U_n(x)$ pour tout n et tout $x \in [a, b]$;
- $\lim_n \int_a^b (U_n(t) - u_n(t)) dt = 0$.

Alors f est Riemann-intégrable et $\int_a^b f(t) dt = \lim_n \int_a^b U_n(t) dt = \lim_n \int_a^b u_n(t) dt$.

Ce théorème fournit une première méthode pour calculer l'intégrale d'une fonction : il s'agit d'inventer les deux suites u_n et U_n avec les propriétés voulues et de façon à ce que la limite de $\int_a^b u_n(t) dt$ (ou celle de $\int_a^b U_n(t) dt$) soit facile à calculer.

EXEMPLE.

Soit a un nombre réel positif et $f : [0, a] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ pour $x \in [0, a]$. Soit n un entier non nul. On définit la subdivision s_n de pas constant $1/n$ sur $[0, a]$ par : $x_i = ai/n$ pour $i = 0, \dots, n$. Pour chaque $x \in [0, a]$, il existe un unique i tel que $x \in [ai/n, a(i+1)/n[$ et on peut donc définir :

$$u_n(x) = \begin{cases} ai/n & \text{si } ai/n \leq x < a(i+1)/n \text{ pour un } i = 0, \dots, n-1 \\ a & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Ainsi u_n est une fonction en escalier sur $[0, a]$ et s_n est une subdivision adaptée à u_n . De plus on a $u_n(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [0, a]$. On définit de même

$$U_n(x) = \begin{cases} a(i+1)/n & \text{si } ai/n \leq x < a(i+1)/n \text{ pour un } i = 0, \dots, n-1 \\ a & \text{si } x = a \end{cases}$$

si bien que s_n est également adaptée à U_n et $f(x) \leq U_n(x)$ pour tout $x \in [0, a]$.

Pour tout $x \in]ai/n, a(i+1)/n[$ on a $U_n(x) - u_n(x) = a(i+1)/n - ai/n = a/n$. La subdivision s_n est donc également adaptée à $U_n - u_n$ et l'intégrale de $U_n - u_n$ (au sens des fonctions en escaliers) est :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a}{n} \left(\frac{a(i+1)}{n} - \frac{ai}{n} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a}{n} \right)^2 = \frac{a^2}{n}.$$

Cette intégrale tend vers 0 avec n , la fonction f est donc Riemann-intégrable. De plus on a :

$$\int_0^a u_n(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{ai}{n} \left(\frac{a(i+1)}{n} - \frac{ai}{n} \right) = \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{a^2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{a^2}{2} \frac{n(n-1)}{n^2}$$

donc

$$\int_0^a f(t) dt = \lim_n \int_0^a u_n(t) dt = \lim_n \frac{a^2}{2} \frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{a^2}{2}.$$

EXEMPLE.

Considérons maintenant $f(x) = x^2$ sur $[0, a]$. Le calcul est à peu près le même mais avec $u_n(x) = (ai/n)^2$ et $U_n(x) = (a(i+1)/n)^2$ pour $x \in [ai/n, a(i+1)/n[$ et $u_n(a) = U_n(a) = a^2$, si bien que l'intégrale (en tant que fonction en escalier) de $U_n - u_n$ est :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\left(\frac{a(i+1)}{n} \right)^2 - \left(\frac{ai}{n} \right)^2 \right) \frac{a}{n} = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 - i^2 = \frac{a^3}{n^3} n^2 = \frac{a^3}{n}$$

Cette intégrale tend vers 0 avec n , donc f est Riemann-intégrable. De plus l'intégrale de u_n est :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{ai}{n} \right)^2 \frac{a}{n} = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{a^3}{n^3} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{a^3}{n^2} \frac{(n-1)(2n-1)}{6}$$

dont la limite avec n est $a^3/3$.

EXEMPLE.

Soit maintenant la fonction $f(x) = 1/x$ définie sur l'intervalle $[1, a]$ où a est un réel plus grand que 1. On définit la subdivision s_n par $x_i = a^{i/n}$ pour $i = 0, \dots, n$. Remarquons que contrairement aux deux exemples précédents, cette subdivision n'est pas à pas constant, puisque $x_{i+1} - x_i = a^{i/n}(a^{1/n} - 1)$ dépend de i .

On définit les deux fonctions en escalier u_n et U_n par :

$$u_n(x) = \begin{cases} a^{-\frac{i+1}{n}} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[, \text{ c'est à dire } a^{\frac{i}{n}} \leq x < a^{\frac{i+1}{n}} , \\ a & \text{si } x = a \end{cases}$$

$$U_n(x) = \begin{cases} a^{-\frac{i}{n}} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[, \text{ c'est à dire } a^{\frac{i}{n}} \leq x < a^{\frac{i+1}{n}} , \\ a & \text{si } x = a \end{cases}$$

de façon à ce que pour tout $x \in [1, a]$ on a bien $u_n(x) \leq f(x) \leq U_n(x)$. Pour $x \in]x_i, x_{i+1}[$ on a donc $U_n(x) - u_n(x) = a^{-i/n}(1 - a^{-1/n})$, si bien que l'intégrale (en tant que fonction en escalier) de $U_n - u_n$ est :

$$\sum_{i=0}^{n-1} a^{-\frac{i}{n}} (1 - a^{-\frac{1}{n}}) a^{\frac{i}{n}} (a^{\frac{1}{n}} - 1) = n(1 - a^{-\frac{1}{n}})(a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

Si on considère un développement limité d'ordre 1 de $a^{1/n} = e^{1/n \log a} = 1 + 1/n \log a + (1/n \log a)\epsilon(1/n \log a)$, on voit que $n(a^{1/n} - 1)$ tend vers $\log a$ avec n , donc, comme $(1 - a^{-1/n})$ tend vers 0, l'intégrale ci-dessus tend bien vers 0. Si on calcule maintenant l'intégrale de u_n , on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n-1} a^{-\frac{i}{n}} a^{\frac{i}{n}} (a^{\frac{1}{n}} - 1) = n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

qui tend donc vers $\log a$, comme attendu.

2.2.3 Théorème (Propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann)

Soit f, g deux fonctions Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et λ un réel. On a alors :

- $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$;
- $\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$;
- si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$;
- pour tout $c \in [a, b]$ on a $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.

C'est le même théorème que pour les fonctions en escalier, étendu aux fonctions Riemann-intégrables.

2.2.4 Théorème (Intégrale d'une valeur absolue)

Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Alors $|f|$ est Riemann-intégrable et :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

2.2.5 Théorème

Si $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est continue alors f est Riemann-intégrable.

2.2.6 Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et F la fonction sur $[a, b]$ définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Alors F est une primitive de f , c'est à dire que F est dérivable sur $[a, b]$ et $F' = f$.

REMARQUE

Ce théorème important montre que toute fonction continue admet une primitive.

2.2.7 Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f . Alors on a :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

2.3 Intégrales impropres

Les intégrales que nous avons vues jusqu'à maintenant sont dites *définies* ce qui signifie qu'elles permettent d'intégrer des fonctions partout définies sur un intervalle *fermé* $[a, b]$. On va maintenant considérer le cas d'une fonction qui n'est pas définie en b , avec en particulier la possibilité que $b = +\infty$, c'est à dire que la fonction soit définie sur $[a, +\infty[$.

2.3.1 Définition (Intégrale impropre)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b]$ (où a est soit un nombre réel, soit $-\infty$) telle que pour tout $x \in]a, b]$, f est Riemann-intégrable sur $[x, b]$. On dira alors que f est intégrable sur $]a, b]$ et par définition l'intégrale impropre de f entre a et b est la limite :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t) dt$$

REMARQUE

Cette définition est similaire à celle de série : une série est la limite de ses sommes partielles, une intégrale impropre est la limite de ses intégrales définies.

Comme pour les séries, une intégrale impropre peut converger ou diverger selon que la limite existe ou non.

REMARQUE

Il se peut que f soit définie sur $]a, b[$ et Riemann-intégrable sur $[a, b]$, typiquement quand f est continue sur $]a, b[$ et continue en a . C'est le cas par exemple de la fonction $f(x) = (\sin x)/x$ qui est définie sur $]0, \pi]$ et continue en 0. Dans ce cas l'intégrale impropre de f est égale à l'intégrale définie. Les vrais cas d'intégrales impropres sont soit quand $a = -\infty$, soit quand $f(x)$ n'est pas continue en a , par exemple quand f tend vers ∞ quand x tend vers a .

2.3.1 Théorème

Soit f une fonction intégrable sur $]a, b[$. Alors pour tout $x \in]a, b[$, f est intégrable sur $]a, x]$ et sur $[x, b[$ et on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt$$

2.3.2 Définition

Soit f définie sur $[a, b[$ (où b est possiblement $+\infty$) et g la fonction définie par $g(t) = f(-t)$. Alors g est définie sur $] -b, -a]$; on dira que f est intégrable sur $[a, b[$ si g l'est sur $] -b, -a]$ et on définira l'intégrale de f sur $[a, b[$ par :

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_{-b}^{-a} g(t) dt$$

Soit maintenant f une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$. On dira que f est intégrable sur $]a, b[$ si f est intégrable sur $]a, x]$ et sur $[x, b[$ pour tout $x \in]a, b[$. En vertu du théorème précédent on a, pour tous $x < y \in]a, b[$:

$$\int_a^x f(t) dt + \int_x^y f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^y f(t) dt + \int_y^b f(t) dt = \int_a^y f(t) dt + \int_y^b f(t) dt.$$

Par définition l'intégrale de f sur $]a, b[$ est :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt$$

où x est un élément de $]a, b[$ que l'on choisit comme on veut.

EXEMPLE.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente. En effet une primitive de e^{-t} est $-e^{-t}$, donc

$$\int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

EXEMPLE.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} 1/t^2 dt$ est convergente. En effet une primitive de $1/t^2$ est $-1/t$, donc pour $x > 1$ on a :

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1.$$

Par contre $\int_0^1 1/t^2 dt$ est divergente puisque cette fois on a :

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

Cet exemple est un cas particulier du théorème suivant :

2.3.2 Théorème

Soit α un nombre réel. On a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha > 1$$
$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha < 1$$

REMARQUE

En particulier l'intégrale de $1/x$ diverge en 0 et en $+\infty$.

L'étude des intégrales impropres est très similaire à celle des séries. Par exemple le théorème précédent est l'analogie du théorème sur les séries de Riemann. Comme pour les séries, le cas des fonctions positives joue un rôle important.

2.3.3 Théorème (Comparaison)

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $]a, b]$ vérifiant $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in]a, b]$. Alors :

- si $\int_a^b g(t) dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ converge ;
- si $\int_a^b f(t) dt$ diverge alors $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

EXEMPLE.

Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Comme $x^2 \geq x$ dès que $x \geq 1$ on a $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ pour tout $x \geq 1$ donc, comme $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

2.3.4 Théorème (Convergence absolue)

Soit f une fonction intégrable sur $]a, b]$. Si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ converge également et on a :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

On dit alors que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est *absolument convergente*. Comme pour les séries, ce théorème sert à ramener l'étude de l'intégrale impropre d'une fonction quelconque à celle de l'intégrale impropre d'une fonction positive.

EXEMPLE.

L'intégrale impropre $\int_\pi^{+\infty} (\cos t)/t^2 dt$ est absolument convergente. En effet $|(\cos t)/t^2| \leq 1/t^2$ pour tout $t \geq \pi$ et $\int_\pi^{+\infty} 1/t^2 dt$ converge.

EXEMPLE.

L'intégrale impropre $\int_{2\pi}^{+\infty} (\sin t)/t dt$ converge mais n'est pas absolument convergente. Cette intégrale est l'analogie de la série harmonique alternée.

Pour voir la convergence il faut faire une intégration par partie. En posant $(\sin t)/t = u'v(t)$ avec $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = 1/t$ il vient :

$$\int_{2\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_{2\pi}^x - \int_{2\pi}^x \frac{\cos t}{t^2} dt = \frac{1}{2\pi} - \frac{\cos x}{x} - \int_{2\pi}^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

On a vu que $\int_{2\pi}^x \frac{\cos t}{t^2} dt$ est convergente et comme $(\cos x)/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on a bien que $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

D'autre part soit n un entier positif. Pour $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$ on a $|\sin t|/t \geq |\sin t|/(n+1)\pi$. Mais quand $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$, $|\sin t| = |\sin(t - n\pi)| = \sin(t - n\pi)$ car $t - n\pi \in [0, \pi]$ et $\sin(t - n\pi)$ est positif. Donc

en faisant le changement de variable $u = t - n\pi$ on obtient $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt = \int_0^\pi \sin u du = 2$. Comme l'intégrale sur $[n\pi, (n+1)\pi]$ est définie, on en déduit que $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|/t dt \geq 1/(n+1)\pi \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt$ et on obtient donc finalement :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \frac{2}{n+1}$$

Grâce à la relation de Chasle on a $\int_{2\pi}^{2n\pi} |\sin t|/t dt = \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|/t dt \geq 2 \sum_{k=2}^{n-1} 1/(k+1)$. Or la dernière somme tend vers l'infini avec n , donc il en est de même de l'intégrale. On vient donc de montrer que l'intégrale de $(\sin t)/t$ n'est pas absolument convergente.

2.3.5 Théorème

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$. Supposons de plus que f est décroissante et positive, c'est à dire que $0 \leq f(x) \leq f(y)$ dès que $x \geq y$. Alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge ssi la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge.

EXEMPLE.

Ce résultat permet de retrouver le fait que $\int_1^{+\infty} dt/t$ diverge : en effet la série harmonique $\sum_{n \geq 1} 1/n$ diverge. De même l'intégrale $\int_2^{+\infty} 1/(t \log t) dt$ diverge car la série $\sum_{n \geq 2} 1/(n \log n)$ diverge.

EXEMPLE.

Ce résultat peut aussi être utilisé pour montrer la convergence d'une série. Considérons par exemple

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$$

Pour $\alpha \leq 1$ on sait déjà que cette série diverge (car $\frac{1}{n(\log n)^\alpha} \geq \frac{1}{n \log n}$). Supposons maintenant que $\alpha > 1$. La fonction $\frac{1}{t}(\log t)^{-\alpha}$ est positive et décroissante vers 0 sur $[2, +\infty[$; de plus elle est de la forme $f'f^{-\alpha}$ et a donc pour primitive $\frac{1}{1-\alpha}(\log t)^{1-\alpha}$. Donc

$$\int_2^x \frac{d}{dt} t(\log t)^\alpha = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(\log 2)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\log x)^{\alpha-1}} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\log 2)^{\alpha-1}}$$

et par conséquent l'intégrale converge. Par le théorème on en déduit que la série converge également.

2.3.6 Théorème (Utilisation des équivalents)

Soit f et g deux fonctions intégrables et positives sur $[a, b[$. Si f et g sont équivalentes en b , c'est à dire si $f(t)/g(t) \xrightarrow[t \rightarrow b]{} 1$, alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge ssi l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ converge.

EXEMPLE.

L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^3+2t+2} dt$$

converge car en $+\infty$, la fonction $\frac{t+1}{t^3+2t+2}$ est équivalente à $\frac{1}{t^2}$.

Chapitre 3

Espaces métriques et espaces vectoriels normés

Le but de ce chapitre est de généraliser un certain nombre de résultats connus sur les suites de réels et les fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . En particulier, les espaces vectoriels normés permettent d'étendre la notion de continuité à des fonctions à plusieurs variables.

3.1 Espaces métriques

3.1.1 Définition

Un espace métrique est un ensemble X muni d'une distance (que l'on appelle également une métrique), c'est à dire une fonction $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}^+$ vérifiant pour tout $x, y, z \in X$:

- $d(x, x) = 0$ et si $d(x, y) = 0$ alors $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Cette dernière propriété est appelée l'inégalité triangulaire.

EXEMPLE.

La définition de distance est en fait une énumération des propriétés utiles de la valeur absolue réelle. Autrement dit, cette définition généralise la valeur absolue. Tout naturellement le premier exemple d'espace métrique est donc \mathbb{R} muni de la distance valeur absolue $d(x, y) = |y - x|$. Et le deuxième exemple est \mathbb{C} muni de la distance module.

REMARQUE

Si X est un espace métrique et si Y est une partie de X alors Y est également un espace métrique lorsqu'on le muni de la distance $d_Y(x, y) = d_X(x, y)$ pour tout $x, y \in Y$.

3.1.2 Définition (Boules)

Soit X un espace métrique et d sa distance. On appelle boule de centre x et de rayon r le sous-ensemble $B(x, r)$ de X défini par :

$$B(x, r) = \{y \in X, d(x, y) < r\}$$

EXEMPLE.

Si on prend l'espace métrique \mathbb{R} , la boule $B(x, r)$ est exactement l'intervalle ouvert $]x - r/2, x + r/2[$.

3.1.3 Définition (Convergence des suites)

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de points appartenant à un espace métrique X . On dit que (x_n) converge vers x si on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N : d(x_n, x) < \epsilon$$

REMARQUE

On peut remplacer $d(x_n, x) < \epsilon$ par $x_n \in B(x, \epsilon)$.

3.1.4 Définition (Continuité)

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction de l'espace métrique X dans l'espace métrique Y . On note d_X la distance sur X et d_Y celle sur Y . On dit que f est continue en x_0 si : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in X$:

$$\text{si } d_X(x, x_0) < \alpha \text{ alors } d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

REMARQUE

On peut remplacer ce dernier énoncé par l'énoncé équivalent :

$$\text{si } x \in B(x_0, \alpha) \text{ alors } f(x) \in B(f(x_0), \epsilon).$$

3.1.1 Théorème

Soient X, Y, Z trois espaces métriques, f une fonction de X dans Y et g une fonction de Y dans Z . Si f est continue en $x_0 \in X$ et g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

En particulier si f est continue sur X et g est continue sur Y alors $g \circ f$ est continue sur X .

3.1.5 Définition (Ouverts, fermés)

Soit X un espace métrique et U une partie de X . On dit que U est ouvert si pour tout x dans U , il existe un $\epsilon > 0$ tel que la boule $B(x, \epsilon)$ soit entièrement contenue dans U . Autrement dit :

$$\forall x \in U, \exists \epsilon > 0, \forall y \in X : \text{si } d(x, y) < \epsilon \text{ alors } y \in U$$

Une partie F de X sera dite fermée si son complémentaire $X \setminus F$ est ouvert.

REMARQUE

L'ensemble vide est ouvert. En effet la condition est vérifiée pour tout $x \in \emptyset$ puisqu'il n'y a aucun $x \in \emptyset$! De même X tout entier est ouvert. Comme son complémentaire est l'ensemble vide, celui-ci est également fermé. Et comme X est le complémentaire de \emptyset qui est ouvert, X est aussi fermé.

REMARQUE

Attention : un ensemble qui n'est pas ouvert n'est pas automatiquement fermé. Par exemple le sous-ensemble $[0, 1[$ de \mathbb{R} n'est ni ouvert, ni fermé.

REMARQUE

Une boule est un ensemble ouvert de X . Soit $x_0 \in X$, $r > 0$ et $B(x_0, r)$ la boule de centre x_0 et de rayon r . Soit $x \in B(x_0, r)$; par définition on a $d(x_0, x) < r$. Posons $r' = r - d(x_0, x)$; on a donc $r' > 0$. On va montrer que la boule $B(x, r')$ est contenue dans $B(x_0, r)$. Soit donc $y \in B(x, r')$ c'est à dire dire que $d(x, y) < r'$. Par l'inégalité triangulaire, $d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y)$, donc $d(x_0, y) < d(x_0, x) + r' = r$, donc $y \in B(x_0, r)$.

Voici une propriété très utile pour montrer qu'un ensemble est fermé.

3.1.2 Théorème (Caractérisation des fermés)

Soit X un espace métrique et F une partie de X . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- F est fermée;
- toute suite convergente de points de F a sa limite dans F .

La deuxième condition peut se formuler plus mathématiquement : pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$, si $x_n \in F$ pour tout n et si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ alors $x \in F$.

EXEMPLE.

On peut voir que $[0, 1[$ n'est pas fermé dans \mathbb{R} car si on considère la suite $x_n = 1 - 1/n$, celle-ci converge vers 1, et chaque x_n appartient bien à $[0, 1[$, mais pas la limite. Par contre $[0, 1]$ est fermé, comme attendu.

3.1.3 Théorème

Soit X et Y deux espaces métriques et f une fonction de X dans Y . Alors f est continue sur X ssi l'image inverse de f préserve les ouverts, c'est à dire ssi :

$$\forall U \subset Y, \text{ si } U \text{ est un ouvert de } Y \text{ alors } f^{-1}(U) \text{ est un ouvert de } X.$$

f est également continue ssi son image inverse préserve les fermés.

On rappelle que $f^{-1}(U) = \{x \in X, f(x) \in U\}$.

REMARQUE

Attention : on parle ici d'image inverse. En général on ne peut rien dire sur l'image directe. Une fonction continue peut très bien envoyer un ouvert sur un fermé (ou un fermé sur un ouvert), voire même un ouvert sur un rien du tout. Par exemple la fonction \sin est continue et elle envoie l'intervalle ouvert $]0, 2\pi[$ sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$.

3.1.6 Définition (Point d'accumulation et ensembles compacts)

Soit X un espace métrique et $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de points de X . On dit que x est un point d'accumulation de la suite (x_n) si pour tout $\epsilon > 0$, il y a une infinité de points de la suite qui s'approche de x à ϵ près, c'est à dire :

$$\forall \epsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N : x_n \in B(x, \epsilon)$$

Soit K une partie de X . On dit que K est compact si toute suite de points de K a un point d'accumulation dans K .

EXEMPLE.

Si (x_n) est une suite convergente vers x alors x est un point d'accumulation de (x_n) et c'est le seul.

EXEMPLE.

Soit $x_n = (-1)^n$. La suite (x_n) a deux points d'accumulation : -1 et 1 . Soit maintenant $x_n = (-1)^n + 1/n$: cette suite a également deux points d'accumulation qui sont encore -1 et 1 .

3.1.4 Proposition

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de points d'un espace métrique X . Pour tout x dans X , x est un point d'accumulation de (x_n) ssi (x_n) a une sous-suite convergente vers x , c'est à dire ssi il existe des entiers $n_0 < n_1 < \dots$ tels que $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$.

Une conséquence de cette propriété est que dans un ensemble compact K , tous les points d'accumulation d'une suite de points de K sont dans K .

3.1.5 Théorème (Fonction continue sur un compact)

Soit X un espace métrique, K un sous-ensemble compact de X et f une fonction continue de X dans \mathbb{R} . On a les propriétés suivantes :

– $f(K)$ est bornée, c'est à dire

$$\exists M, \forall x \in K : |f(x)| \leq M$$

– f atteint ses bornes sur K , c'est à dire

$$\exists x_0 \in K, \forall x \in K : f(x) \leq f(x_0)$$

REMARQUE

En fait ce théorème est un cas particulier d'un théorème légèrement plus général : l'image d'un compact par une fonction continue est compacte. Remarquons que ici on parle d'image directe. La compacité est fondamentale, l'image d'un fermé ou d'un ouvert par une fonction continue n'est en générale pas un fermé ou un ouvert.

3.2 Espaces vectoriels normés

Un espace vectoriel normés est un espace métrique qui en plus a une structure algébrique d'espace vectoriel (ou encore un espace vectoriel qui en plus a une structure métrique). On rappelle qu'un espace vectoriel est un ensemble dans lequel on peut ajouter les objets entre eux, et aussi les multiplier par un *scalaire*, c'est à dire un réel (on parle alors d'espace vectoriel réel) ou un complexe (et l'on parle d'espace vectoriel complexe). Dans ce chapitre on va se concentrer essentiellement sur les espaces vectoriels réels.

3.2.1 Définition (Norme)

Soit E un espace vectoriel réel. Une norme sur E est une application $x \mapsto \|x\|$ qui associe à chaque vecteur un nombre réel positif et qui de plus a les propriétés suivantes :

– $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$;

– $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

– $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

La dernière propriété est appelée inégalité triangulaire. Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé (e.v.n.).

3.2.1 Proposition

Si E est un espace vectoriel normé, alors la fonction $d(x, y) = \|y - x\|$ est une distance et donc E est un espace métrique.

EXEMPLE.

\mathbb{R} est un espace vectoriel réel (de dimension 1) et $|x|$ est une norme sur \mathbb{R} . On retrouve la structure métrique habituelle de \mathbb{R} .

EXEMPLE.

Plus généralement \mathbb{R}^n est un espace vectoriel sur lequel on définit trois normes :

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$;
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$;
- $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$,

où pour $i = 1, \dots, n$, le nombre x_i est la i -ème composante du vecteur x de \mathbb{R}^n . Ces trois normes sont appelés les normes *usuelles* de \mathbb{R}^n . Remarquons que dans le cas où $n = 1$, ces trois normes sont identiques. Pour montrer que la norme 2 vérifie l'inégalité triangulaire on a besoin du théorème de Cauchy-Schwarz ci-dessous.

On rappelle qu'un *produit scalaire* sur l'espace vectoriel réel E est une application bilinéaire symétrique définie positive, c'est à dire une application associant un nombre réel $\langle x, y \rangle$ à tout couple de vecteurs x et y et vérifiant pour tout x, y, z dans E et tout λ dans \mathbb{R} :

- $\langle x, x \rangle \geq 0$ et si $\langle x, x \rangle = 0$ alors $x = 0$;
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$; $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$; $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;

Un espace vectoriel sur lequel est défini un produit scalaire est appelé un espace vectoriel *euclidien*.

3.2.2 Théorème (Cauchy-Schwarz)

Soit E un espace vectoriel euclidien. Si on définit $N(x) = \langle x, x \rangle$ pour tout $x \in E$ alors on a :

$$\langle x, y \rangle^2 \leq N(x)N(y)$$

pour tout $x, y \in E$.

Comme $N(x)$ est positif par définition de produit scalaire, on peut définir $\|x\| = \sqrt{N(x)}$ pour tout x . Avec cette notation l'inéquation de Cauchy-Schwarz devient :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

On en déduit immédiatement que $\|x\|$ vérifie l'inégalité triangulaire et donc que c'est une norme (appelée la norme du produit scalaire).

EXEMPLE.

En particulier en prenant $E = \mathbb{R}^n$ on vérifie facilement que $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un produit scalaire et donc que la norme 2 que l'on a définie ci-dessus est la norme du produit scalaire de \mathbb{R}^n et vérifie donc l'inégalité triangulaire.

EXEMPLE.

On se place dans \mathbb{R}^2 et on considère la fonction

$$N(x, y) = x^2 - xy + 2y^2.$$

Alors $N(x, y)$ est une *forme quadratique définie positive*; explicitons chacun de ces termes :

- une *forme quadratique* sur \mathbb{R}^n est une fonction $Q(u)$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} telle que il existe une fonction *bilinéaire* $f(u_1, u_2)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} vérifiant $Q(u) = f(u, u)$ pour tout vecteur u de \mathbb{R}^n . Étant donnée Q on peut trouver f par la formule :

$$f(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(Q(u_1 + u_2) - Q(u_1) - Q(u_2))$$

Si la fonction f ainsi définie est bilinéaire alors on voit facilement que $Q(u) = f(u, u)$, donc que Q est bien une forme quadratique. Dans notre exemple, on prend $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2)$ (si bien que $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$) et on calcule :

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \frac{1}{2}(N(x_1 + x_2, y_1 + y_2) - N(x_1, y_1) - N(x_2, y_2))$$

Le calcul donne :

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + 2y_1y_2$$

dont on voit facilement qu'elle est bilinéaire, et même symétrique. N est donc bien une forme quadratique.

- Une forme quadratique Q sur \mathbb{R}^n est *positive* si la fonction bilinéaire f associée est positive, c'est à dire si l'on a $Q(u) \geq 0$ pour tout vecteur u de \mathbb{R}^n . Dans notre exemple on va vérifier cela en considérant $N(x, y)$ comme un polynôme du second degré en x , et en traitant y comme un paramètre. Si on calcule le discriminant on obtient :

$$\Delta = y^2 - 4 \times 2y^2 = -7y^2$$

Ce discriminant est donc négatif ou nul quelle que soit la valeur de y , ce qui entraîne que $N(x, y)$ ne change jamais de signe. Donc $N(x, y)$ a toujours le signe de par exemple $N(1, 1) = 2$ et est donc toujours positif ou nul.

- une forme quadratique Q sur \mathbb{R}^n est *définie* si la fonction bilinéaire f associée est définie, c'est à dire si $Q(u) = 0$ n'arrive que lorsque $u = 0$ (c'est à dire $Q(u) = 0$ entraîne $u = 0$). Dans notre exemple il s'agit donc de déterminer les valeurs de x et y telles que $N(x, y) = 0$. De telles valeurs existent seulement quand le discriminant Δ est positif ou nul, mais comme $\Delta = -7y^2$ cela n'arrive que si $y = 0$. Dans ce cas on a $N(x, y) = x^2$ et donc $N(x, y) = 0$ seulement si $x = 0$ également. On a donc bien que $N(x, y) = 0$ entraîne $x = y = 0$ et N est donc bien définie.

On vient donc de voir que la fonction f est bilinéaire symétrique définie positive, c'est à dire que c'est un produit scalaire. Par conséquent

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 - xy + 2y^2}$$

est une norme sur \mathbb{R}^2 .

3.2.3 Théorème (Application linéaire continue)

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est continue ;
- f est continue en 0 ;
- l'image de la boule unité est bornée

En particulier si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.

EXEMPLE.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie (par exemple $E = \mathbb{R}^n$) et F un espace vectoriel normé. On considère l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F . C'est un espace vectoriel, sous-espace de l'espace vectoriel des applications de E dans F . Comme E est de dimension finie, toute application linéaire f est continue et on peut définir :

$$\|f\| = \sup_{x \in B_E(0,1)} \|f(x)\|_F.$$

Alors $\|f\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$. En particulier on peut vérifier l'inégalité triangulaire : pour n'importe quel $x \in B_E(0, 1)$ on a :

$$\|f(x) + g(x)\|_F \leq \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F$$

Mais comme $x \in B(0, 1)$ on a $\|f(x)\|_F \leq \|f\|$ et $\|g(x)\|_F \leq \|g\|$, d'où $\|f(x) + g(x)\|_F \leq \|f\| + \|g\|$ pour tout $x \in B(0, 1)$. On en déduit que :

$$\|f + g\| = \sup_{x \in B(0,1)} \|f(x) + g(x)\|_F \leq \|f\| + \|g\|.$$

3.3 L'espace \mathbb{R}^n

On va maintenant considérer l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . En fait la plupart des résultats que l'on va énoncer sont valables pour n'importe quel espace vectoriel réel ou complexe *de dimension finie*. Le principal intérêt de l'étude de \mathbb{R}^n est qu'elle va nous permettre de généraliser un certain nombre de résultats connus sur les fonctions réelles au cas de fonctions à n variables : en effet une fonction de n variable est une fonction définie sur \mathbb{R}^n et peut donc être considérée comme une fonction d'une seule variable, qui est un vecteur de \mathbb{R}^n .

Une fois pour toute on convient que, si x est un vecteur de \mathbb{R}^n , alors ses coordonnées seront notées x_1, \dots, x_n , c'est à dire :

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

Cette notation est commode et on l'étend aux suites de vecteurs de la manière suivante : si $(x_k)_{k \geq 0}$ est une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n alors x_k désigne le k -ième vecteur de cette suite (et non la k -ième coordonnée d'un vecteur x) et on notera x_{ki} la i -ème coordonnée de x_k . On a donc :

$$\begin{aligned} x_0 &= (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \\ x_1 &= (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}) \\ &\vdots \\ x_k &= (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

3.3.1 Définition (Normes équivalentes)

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On dit que ces deux normes sont équivalentes si il existe deux constantes a et b telles que $0 < a \leq b$ et pour tout $x \in E$:

$$a \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b \|x\|_1$$

Dans ce cas les deux normes définissent la même topologie sur E c'est à dire que l'on a :

- si $U \subset E$, U est ouvert pour la première norme ssi U est ouvert pour la seconde ;
- si $(x_k)_{k \geq 0}$ est une suite de vecteurs de E alors (x_k) converge pour la première norme ssi (x_k) converge pour la seconde (et évidemment la limite est la même) ;
- si $A \subset E$, X est un espace métrique et f est une fonction de A dans X alors f est continue en $a \in A$ pour la première norme ssi f est continue en a pour la seconde.

3.3.1 Théorème (Équivalence des normes usuelles)

Pour tout vecteur x de \mathbb{R}^n on a :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

et donc les trois normes usuelles sont équivalentes.

On va voir que ce résultat est en fait un cas particulier d'un autre plus général, mais qui se démontre en utilisant l'important théorème suivant :

3.3.2 Théorème (Bolzano-Weierstrass)

Les compacts de \mathbb{R}^n sont exactement les sous-ensembles fermés bornés de \mathbb{R}^n .

En particulier, pour chacune des trois normes la boule de centre 0 et de rayon 1 est compacte. Attention, cela n'est vrai qu'en dimension finie. Ce théorème a pour conséquence :

3.3.3 Théorème (Équivalence des normes de \mathbb{R}^n)

Si N est une norme sur \mathbb{R}^n alors N est équivalente à n'importe laquelle des normes usuelles. Autrement dit, toutes les normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes.

Grâce à ce théorème, on fera désormais l'économie de spécifier la norme et on dira simplement par exemple que f est continue au lieu de f est continue relativement à la norme $\|\cdot\|_i$.

3.3.4 Théorème

Soit $(x_k)_{k \geq 0}$ une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n . La suite converge vers x ssi pour $i = 1, \dots, n$ la suite coordonnée $(x_{ki})_{k \geq 0}$ converge vers x_i .

On rappelle que la notation définit x_{ki} comme la i -ème coordonnée du vecteur x_k et x_i comme la i -ème coordonnée du vecteur x .

3.3.5 Théorème

Soit f une fonction d'une partie A de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p . Il existe des fonctions f_1, \dots, f_p de A dans \mathbb{R} telles que pour tout $x \in A$:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)).$$

De plus f est continue en $x_0 \in A$ ssi chaque f_i est continue en x_0 .

Une autre conséquence importante de Bolzano-Weierstrass est :

3.3.6 Théorème (Continuité des applications linéaires sur \mathbb{R}^n)

Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^n dans un espace vectoriel normé E . Alors f est continue.

Ce résultat est encore valable si on prend un espace vectoriel normé de dimension finie à la place de \mathbb{R}^n mais devient faux en dimension infinie, c'est à dire que si E est un e.v.n. de dimension infinie et F un e.v.n. quelconque, il peut exister des applications linéaires mais non continues de E dans F .

Chapitre 4

Dérivabilité dans \mathbb{R}^n

La notion d'espace vectoriel normé permet comme on l'a vu d'étendre au cas à plusieurs variables des notions topologiques de base : convergence de suite et continuité. En particulier on a maintenant une notion de continuité pour les fonctions de \mathbb{R}^n (fonctions à n variables) dans \mathbb{R}^p . Dans ce chapitre on va continuer sur cette idée, en étendant cette fois la définition de *dérivabilité* au cas des fonctions à plusieurs variables.

4.1 Différentiabilité

Dans cette section on note U un ouvert de \mathbb{R}^n , et f une fonction de U dans \mathbb{R}^p .

4.1.1 Définition (Différentiabilité)

On dit que f est différentiable au point $x_0 \in U$ si il existe une application linéaire $Df_{x_0}(x)$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p vérifiant :

$$f(x) - f(x_0) - Df_{x_0}(x - x_0) = o(\|x - x_0\|)$$

c'est à dire : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que dès que $x \in U$ et $\|x - x_0\| < \eta$ on a :

$$\|f(x) - f(x_0) - Df_{x_0}(x - x_0)\| < \epsilon \|x - x_0\|$$

REMARQUE

Dans cette définition on tire partie du fait que toutes les normes sur \mathbb{R}^n (et \mathbb{R}^p) sont équivalentes pour faire l'économie de spécifier explicitement la norme.

REMARQUE

On peut vérifier, en utilisant en particulier le fait que toute application linéaire sur \mathbb{R}^n est continue, qu'il existe *au plus* une application *linéaire* vérifiant la condition, donc que la différentielle de f en x_0 , si elle existe, est unique.

REMARQUE

Cette définition généralise celle usuelle de dérivabilité des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Plaçons nous dans le cas où $n = p = 1$. Alors x et x_0 sont des nombres réels, la norme est la valeur absolue, si bien que la définition de f différentiable en x_0 nous dit qu'il existe une application linéaire Df_{x_0} de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$:

$$|f(x) - f(x_0) - Df_{x_0}(x - x_0)| < \epsilon |x - x_0|$$

dès que $|x - x_0| < \eta$. Mais une application linéaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est forcément de la forme $Df_{x_0}(x) = ax$ pour un nombre a donné. On a donc :

$$|f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)| < \epsilon |x - x_0|$$

ce qui entraîne :

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \right| < \epsilon$$

dès que $|x - x_0| < \eta$. Autrement dit on vient de montrer que le rapport $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ a pour limite, quand x tend vers x_0 , le nombre a . C'est exactement la définition du fait que f est dérivable en x_0 et que sa dérivée est a .

4.1.1 Théorème

Si f est différentiable au point $x_0 \in U$ alors f est continue en x_0 .

EXEMPLE.

Soit la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. On a vu que f n'est pas continue en $(0, 0)$, donc f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Pour la fin de cette section, on supposera que $p = 1$. Soit $x_0 \in U$. On reprend les notations du chapitre précédent, c'est à dire que l'on écrit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$.

Comme U est ouvert, il existe un $\eta > 0$ tel que la boule pour la norme infinie de centre x_0 et de rayon η est entièrement contenue dans U . Par définition de la norme infinie, on a donc $x \in U$ dès que $|x_i - x_{0i}| < \eta$ pour $i = 1, \dots, n$. En particulier, le vecteur $(x_{01}, \dots, x_{0i-1}, x, x_{0i+1}, x_{0n})$ est dans U dès que $|x - x_{0i}| < \eta$. Étant donné x_0 , pour $i = 1, \dots, n$ on note f_i la fonction de $]x_{0i} - \eta, x_{0i} + \eta[$ dans \mathbb{R} définie par :

$$f_i(x) = f(x_{01}, \dots, x_{0i-1}, x, x_{0i+1}, x_{0n}).$$

La fonction f_i est donc une fonction de $]x_{0i} - \eta, x_{0i} + \eta[$ dans \mathbb{R} .

4.1.2 Définition (Dérivée partielle)

Avec les notations introduites ci-dessus, on appelle dérivée partielle au point x_0 dans la direction x_i , et l'on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, la dérivée si elle existe de la fonction f_i en x_{0i} . C'est à dire :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = f'_i(x_{0i}) = \lim_{x \rightarrow x_{0i}} \frac{f(x_{01}, \dots, x_{0i-1}, x, x_{0i+1}, x_{0n}) - f(x_0)}{x - x_{0i}}$$

REMARQUE

Comme la dérivée partielle est définie comme étant une limite, la définition ne dépend pas du $\eta > 0$ que l'on a choisi.

4.1.2 Théorème

Si f est différentiable en $x_0 \in U$ alors pour $i = 1, \dots, n$, la dérivée partielle de f en x_0 dans la direction x_i existe. De plus la différentielle Df_{x_0} est alors donnée par :

$$Df_{x_0}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \cdot x_n$$

Attention, la réciproque est *fausse* en général : il se peut que les dérivées partielles de f existent en x_0 selon chacune des directions x_i , sans pour autant que f ne soit différentiable en x_0 . Autrement dit la propriété de différentiabilité est beaucoup plus forte que celle d'avoir des dérivées partielles : elle dit que la fonction est dérivable (la forme a une tangente) indépendamment de la manière dont on s'approche du point de dérivation alors que l'existence de dérivées partielles dit que la fonction est dérivable seulement en approchant parallèlement à un axe.

EXEMPLE.

Reprenons la fonction $f(x_1, x_2) = x_1x_2/(x_1^2 + x_2^2)$. Si on écrit $x_0 = (x_{01}, x_{02})$, on a $f_1(x) = x_{02}/(x^2 + x_{02}^2)$ et $f_2(x) = x_{01}/(x_{01}^2 + x^2)$. En particulier si $x_0 = (0, 0)$, $f_1(x) = f_2(x) = 0$ sont des fonctions constantes, donc dérivables. C'est à dire que les dérivées partielles de f selon les directions x_1 et x_2 existent en $(0, 0)$. Mais on a vu que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

4.1.3 Définition (Fonctions de classe C^1)

On dit que f est de classe C^1 sur U si pour tout $x_0 \in U$ et pour $i = 1, \dots, n$ la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ existe et si de plus, pour $i = 1, \dots, n$ la fonction $x_0 \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ est continue sur U .

4.1.3 Théorème

Si f est de classe C^1 , alors f est différentiable en tout point x_0 de U .

REMARQUE

Ce théorème exprime donc une espèce de réciproque du précédent, mais il faut bien faire attention à l'hypothèse « f est de classe C^1 » sans laquelle le théorème est faux. Si on reprend toujours le même exemple, on a vu que $f_1(x) = x_{02}/(x^2 + x_{02}^2)$, donc que $f'_1(x) = x_{02}(x_{02}^2 - x^2)/(x^2 + x_{02}^2)^2$. Par conséquent $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = f'_1(x_{01}) = x_{02}(x_{02}^2 - x_{01}^2)/(x_{01}^2 + x_{02}^2)^2$. On voit facilement que cette fonction n'est pas continue en $x_0 = (0, 0)$ ce qui montre que f n'est pas de classe C^1 , donc que le théorème ne s'applique pas; et c'est heureux car on sait que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

4.1.1 Cas d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p

Dans cette section, U est encore un ouvert de \mathbb{R}^n et f une fonction de U dans \mathbb{R}^p . Il existe alors des fonctions f_1, \dots, f_p , de U dans \mathbb{R} telles que :

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$$

On a déjà vu que f est continue en x_0 ssi chaque f_i l'est. Le même résultat est valable pour la différentiabilité :

4.1.4 Théorème

f est différentiable ssi chaque f_i l'est.

4.1.4 Définition (Matrice Jacobienne)

Supposons f différentiable en $x_0 \in U$. Alors pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, p$, f_j admet une dérivée partielle dans la direction x_i en x_0 . On appelle matrice jacobienne de f , la matrice $J_f(x_0)$ des dérivées partielles :

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

4.1.5 Théorème

Sous les hypothèses de la définition, la matrice jacobienne $J_f(x_0)$ de f en x_0 est exactement la matrice de l'application linéaire Df_{x_0} .

4.1.2 Différentielle d'une composée

4.1.6 Théorème

Soit f une fonction de classe C^1 d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m et g une fonction de classe C^1 d'un ouvert V de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^p . Supposons de plus que $f(U) \subset V$. Alors la fonction $g \circ f$ de U dans \mathbb{R}^p est de classe C^1 et sa différentielle en tout point x_0 de U est donnée par :

$$D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{f(x_0)} \circ Df_{x_0}$$

En termes de matrices jacobiennes, on a donc :

$$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$$

REMARQUE

Si on se place dans le cas $n = m = p = 1$, on retrouve la définition de la dérivée d'une fonction composée. Supposons $p = 1$; alors pour $i = 1, \dots, n$, on déduit du théorème la formule explicite :

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(x_0)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$$