Mathématiques Avancées 2
DeuG Mias, Mf 2ème année
01 2004

Exercice 1

i) La série de terme général $u_n = \frac{n!}{10^n}$ est-elle convergente ?

Réponse. Non. Une méthode pour le voir est d'utiliser le critère de d'Alembert (qui est applicable car u_n est positif pour tout n) : en effet le rapport $u_{n+1}/u_n = (n+1)/10$ est strictement plus grand que 1 dès que $n > 10$.
Une méthode plus astucieuse consiste à remarquer que $n!/10^n$ est l'inverse de $10^n/n!$; or il s'agit là du terme général de la série exponentielle, dont on sait qu'elle converge (vers e^{10} dans ce cas). On en déduit que $10^n/n!$ tend vers 0, donc que u_n, son inverse, *ne tend pas vers 0*, par conséquent que la série des u_n est grossièrement divergente.

ii) La série de terme général $u_n = n \cdot sin^2(\frac{1}{n})$ est-elle convergente ?

Réponse. Non. Cela se voit en utilisant des équivalents. On sait qu'au voisinage de 0 on a $\sin x \sim x$ donc, comme $1/n$ tend vers 0, que $\sin 1/n \sim 1/n$ quand n est grand, donc que $n \sin^2 1/n \sim n(1/n)^2 = 1/n$. Or la série harmonique de terme général $1/n$ diverge. Le théorème des équivalents, que nous pouvons utiliser ici car $u_n = n \sin^2 1/n$ et $1/n$ sont positifs pour tout n, nous dit que la série des u_n est de même nature, donc qu'elle diverge également.

iii) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue croissante telle que $f(-t) = -f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La série de terme général $u_n = f(\frac{(-1)^n}{n})$, est-elle convergente ?

Réponse. Oui. Comme $f(-t) = f(t)$ (f est impaire) on a $u_n = f((-1)^n/n) = (-1)^n f(1/n)$; on va montrer que u_n est une suite alternée et que la valeur absolue de u_n tend vers 0 en décroissant. Le théorème des séries alternées nous permettra de conclure que la série des u_n converge.
Comme f est impaire on a en particulier $f(-0) = -f(0)$, donc $f(0) = -f(0)$, donc $f(0) = 0$. Comme f est croissante on a $f(x) \geq 0$ dès que $x \geq 0$. Par conséquent $f(1/n) \geq 0$ pour tout n ; comme $u_n = (-1)^n f(1/n)$, on a bien que u_n est une suite alternée et de plus $|u_n| = f(1/n)$. Reste à voir que $f(1/n)$ tend vers 0 en décroissant. Comme f est continue, $f(1/n)$ tend vers $f(0)$, mais on a vu que $f(0) = 0$ donc il est vrai que $f(1/n)$ tend vers 0. Et pour finir, on voit que $f(1/n)$ est une suite décroissante car f est croissante.

Exercice 2 Est-ce que les intégrales suivantes sont convergentes ?

i)

$$\int_0^1 sin\, t \,\frac{dt}{t}$$

Réponse. La fonction $(\sin t)/t$ est continue sur tout intervalle $[x, 1]$ pour $0 < x \leq 1$ mais n'est pas définie en 0. Toutefois si on définit une fonction f par $f(0) = 1$ et $f(t) = (\sin t)/t$ pour $0 < t \leq 1$, alors, comme on sait que $(\sin t)/t \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 1$ on voit que f est continue sur $[0, 1]$, donc intégrable sur $[0, 1]$. Mais f est le prolongement par continuité en 0 de $(\sin t)/t$, donc l'intégrale ci-dessus converge.

ii)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

Réponse. La fonction $f(t) = e^{-t}/\sqrt{t}$ est continue sur $]0, \infty[$ mais pas en 0. L'intégrale ci-dessus est donc impropre en 0 et en ∞. On la sépare en $\int_0^1 f(t)dt$ et $\int_1^\infty f(t)dt$ que l'on étudie indépendamment : l'intégrale converge ssi chacune de ces deux intégrales converge.

Comme la fonction exponentielle est croissante, et comme $e^0 = 1$, pour tout $t \geq 0$ on a $e^{-t} \leq 1$, donc $e^{-t}/\sqrt{t} \leq 1/\sqrt{t}$. Or l'intégrale $\int_0^1 1/\sqrt{t}\, dt$ converge (l'intégrale en 0 de $1/t^\alpha$ converge ssi $\alpha < 1$). Par théorème de comparaison, que l'on est en droit d'appliquer puisque $f(t) \geq 0$ pour tout t entre 0 et 1, on en déduit que l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ converge également.

De même la fonction $\sqrt{t}$ est croissante et $\sqrt{1} = 1$, donc dès que $t \geq 1$ on a $\sqrt{t} \geq 1$, donc $f(t) \leq e^{-t}$ pour tout $t \geq 1$. Or l'intégrale $\int_1^\infty e^{-t}dt$ converge ; encore une fois par théorème de comparaison on obtient que $\int_1^\infty f(t)dt$ converge également.

Pour cette deuxième intégrale, on pouvait aussi utiliser le fait que $t^\alpha e^{-t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour toute valeur de α. Or pour $t \geq 1$ on a $t^\alpha e^{-t} = t^\alpha \sqrt{t} e^{-t}/\sqrt{t} = t^{\alpha+1/2}e^{-t}/\sqrt{t}$. Prenons α tel que $\alpha + 1/2 > 1$, par exemple $\alpha = 1$. Comme $t^{\alpha+1/2}e^{-t}/\sqrt{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $t^{\alpha+1/2}e^{-t}/\sqrt{t} \leq 1$ pour tout t assez grand. Donc $e^{-t}/\sqrt{t} \leq 1/t^{\alpha+1/2}$ pour tout t assez grand. Mais comme $\alpha + 1/2 > 1$, l'intégrale $\int_1^\infty 1/t^{\alpha+1/2}dt$ converge, et par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\int_1^\infty e^{-t}/\sqrt{t}\, dt$ converge également.

Exercice 3

i) Donner la définition de la continuité d'une application entre des espaces vectoriels normés.

Réponse. Soit f une fonction de l'espace vectoriel normé E dans l'espace vectoriel normé F. Notons $\|-\|_E$ et $\|-\|_F$ les normes de E et F.

La fonction f est continue au point $x \in E$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $y \in E$, si $\|y - x\|_E < \alpha$ alors $\|f(y) - f(x)\| < \epsilon$. La fonction f est continue sur E si elle est continue en tout point x de E, ce que l'on peut écrire de manière plus condensée :

$$\forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y \in E, \text{ si } \|y - x\|_E < \alpha \text{ alors } \|f(y) - f(x)\|_F < \epsilon.$$

Attention à ne pas confondre continuité et continuité uniforme. On dit que f est uniformément continue si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in E, \text{ si } \|y - x\|_E < \alpha \text{ alors } \|f(y) - f(x)\|_F < \epsilon$$

(on notera le subtil déplacement du $\forall x$). Si f est uniformément continue alors f est continue mais la réciproque est en général fausse.

ii) Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'application $\| - \|$: $E \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Réponse. Notons $f(x) = \|x\|$ qui est donc une fonction de E dans $\mathbb{R}$. On veut montrer que f est continue en tout point $x \in E$. Soit $x \in E$ et $\epsilon > 0$. Pour tout $y \in E$ on a $|f(y) - f(x)| = \big|\|y\|_E - \|x\|_E\big|$. Or l'inégalité triangulaire, que doit satisfaire toute norme, nous dit que $\big|\|y\|_E - \|x\|_E\big| \leq \|y - x\|_E$, c'est à dire que $|f(y) - f(x)| \leq \|y - x\|_E$. Si on prend $\alpha = \epsilon$, on a donc que $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ dès que $\|y - x\|_E < \alpha$. On vient donc de montrer que pour tout $x \in E$ et tout $\epsilon > 0$, on sait trouver un α tel que $\|y - x\| \leq \alpha$ entraîne que $|f(y) - f(x)| < \epsilon$, c'est à dire que f est continue en x pour tout $x \in E$.

iii) Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que

$$U = \{x \in E, 1 <\| x \|< 2\}$$

est une partie ouverte de E.

Réponse. Notons encore $f(x) = \|x\|_E$. Alors $U = \{x \in E, f(x) \in]1, 2[\} = f^{-1}(]1, 2[)$. Or $]1, 2[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc U est l'image inverse d'un ouvert par une application dont on a vu à la question précédente qu'elle est continue. C'est donc un ouvert de E.

iv) Soient $c_1 > 0, \ldots, c_n > 0$, des nombres réels strictement positifs et soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application donnée par

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot |x_i|$$

Montrer que l'application ϕ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Réponse. Notons x le vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$. Pour montrer que $\phi(x)$ est une norme il faut vérifier que :

- $\phi(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\phi(x) = 0$ ssi $x = 0$;
- $\phi(\lambda x) = |\lambda| \, \phi(x)$;
- $\phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y)$.

Comme $c_i > 0$, on a $c_i \, |x_i| \geq 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ donc $\phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \, |x_i| \geq 0$. Il est clair que si $x = 0$, c'est à dire si tous les x_i sont nuls, alors $\phi(x) = 0$. Réciproquement supposons $\phi(x) = 0$, c'est à dire $c_1 \, |x_1| + \cdots + c_n \, |x_n| = 0$. Si une somme de nombres positifs est nulle alors chacun de ses termes est nul. Donc $c_i \, |x_i| = 0$ pour chaque i. Mais $c_i > 0$ est donc non nul ; donc $|x_i| = 0$ pour chaque i. Par les propriétés de la valeur absolue, ceci entraîne que x_i est nul pour chaque i, c'est à dire que x est le vecteur nul.

Comme λx est le vecteur $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$, on a $\phi(\lambda x) = \sum_{i=1}^n c_i \, |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^n c_i \, |\lambda| \, |x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n c_i \, |x_i| = |\lambda| \, \phi(x)$ ce qui montre la seconde propriété.

De même, si on note y le vecteur $(y_1, \ldots, y_n)$, $x + y$ est le vecteur $(x_1 + y_1, \ldots, x_n +, y_n)$ et on a $\phi(x+y) = \sum_{i=1}^n c_i \, |x_i + y_i|$. Or par l'inégalité triangulaire de la valeur absolue, on $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ pour $i = 1, \ldots, n$. Donc $\phi(x+y) \leq \sum_{i=1}^n c_i (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n c_i \, |x_i| + \sum_{i=1}^n c_i \, |y_i| = \phi(x) + \phi(y)$ et l'inégalité triangulaire est démontrée.

Trouver des nombres $\lambda > 0$, $\lambda' > 0$, telles que

$$\lambda \parallel x \parallel_\infty \leq \ \phi(x) \ \leq \ \lambda' \parallel x \parallel_1$$

Réponse. Le théorème d'équivalence des normes sur les espaces vectoriels de dimension finie nous dit que λ et λ' existent, mais il ne nous donne pas de valeur.

Posons $\lambda' = \sup_{i=1,\ldots,n} c_i$; alors $\lambda' > 0$. Montrons que $\phi(x) \leq \lambda' \, \|x\|_1$. Par définition de λ' on a $c_i \leq \lambda'$ donc, comme $|x_i| \geq 0$, $c_i \, |x_i| \leq \lambda' \, |x_i|$ pour $i = 1, \ldots, n$. Par conséquent $\phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \, |x_i| \leq \sum_{i=1}^n \lambda' \, |x_i| = \lambda' \sum_{i=1}^n |x_i| = \lambda' \, \|x\|_1$.

Posons $\lambda = \inf_{i=1,\ldots,n} c_i$; remarquons que, comme il n'y a qu'un nombre fini de c_i, il existe un i_0 tel que $\lambda = c_{i_0}$, et comme c_{i_0} est supposé strictement positif, il en est de même de λ. On montre que $\lambda \, \|x\|_\infty \leq \phi(x)$. On sait que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$. Donc $\lambda \, \|x\|_\infty \leq \lambda \, \|x\|_1 = \lambda \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n |\lambda| \, x_i$. Par définition de λ on a $\lambda \leq c_i$, donc $\lambda \, |x_i| \leq c_i \, |x_i|$ pour $i = 1, \ldots, n$. Par conséquent $\sum_{i=1}^n |\lambda| \, x_i \leq \sum_{i=1}^n c_i \, |x_i| = \phi(x)$ et le résultat est démontré.

Exercice 4 Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1(x,y,t) \\ \varphi_2(x,y,t) \end{pmatrix}$, l'application donnée par

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,t & -sin\,t \\ sin\,t & cos\,t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,t \cdot x^2 - sin\,t \cdot y^3 \\ sin\,t \cdot x^2 + cos\,t \cdot y^3 \end{pmatrix}$$

et soit $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(x,y) = x^2 + y^2$. Calculer les dérivées partielles de $\psi \circ \varphi$ et montrer que $\psi \circ \varphi$ est C^1.

Réponse. Le piège de cet exercice est que sa formulation suggère d'utiliser la formule de dérivée partielle d'une fonction composée, *ce qu'il ne faut surtout pas faire*, sous peine de s'embarquer dans un calcul assez compliqué.
Notons u le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées x, y et z et ϕ la composée de ψ et φ, c'est à dire $\phi(u) = \psi \circ \varphi(u)$. La bonne manière de procéder est d'abord de calculer $\phi(u)$:

$$\phi(u) = (\cos t \cdot x^2 - \sin t \cdot y^3)^2 + (\sin t \cdot x^2 + \cos t \cdot y^3)^2$$

Si on effectue le calcul jusqu'au bout on trouve $\phi(u) = x^4 + y^6$. On remarque que $\phi(u)$ ne dépend pas de t d'où l'on déduit immédiatement que $\frac{\partial \phi}{\partial t}(u) = 0$ pour n'importe quel vecteur u de $\mathbb{R}^3$. Les deux autres dérivées partielles ne sont guère difficiles à trouver : $\frac{\partial \phi}{\partial x}(u) = 4x^3$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 6y^5$.
Pour montrer que ϕ est de classe C^1 on peut se contenter de dire que ϕ est une composition de fonctions polynômes ; les fonctions polynômes sont de classe C^1 et les compositions de fonctions de classe C^1 sont de classe C^1. Alternativement on peut dire que les dérivées partielles existent et qu'elles sont continues puisque ce sont des fonctions polynômes également.

Remarque. Il y a également une méthode géométrique qui permet de trouver la valeur de $\phi(u)$ sans calcul. On remarque que la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

est la matrice de la rotation R_t de $\mathbb{R}^2$ d'angle t. Par conséquent on a

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = R_t \begin{pmatrix} x^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

D'autre part on remarque que

$$\psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

c'est à dire que ψ est le carré de la norme 2 sur $\mathbb{R}^2$. En composant ψ et φ on obtient

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \left\| R_t \begin{pmatrix} x^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

Or une rotation est une isométrie, c'est à dire que R_t préserve la norme 2, c'est à dire que pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^2$ on a $\|R_t(v)\|_2 = \|v\|_2$. En appliquant cela on obtient

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \left\| \begin{pmatrix} x^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

Le carré de la norme 2 est la somme des carrés des coordonnées, donc finalement

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = (x^2)^2 + (y^3)^2 = x^4 + y^6$$