

Maths Avancées 2

Les exercices marqués d'une étoile ont été traités en cours.

Dans tous les exos il s'agit d'étudier la convergence de l'intégrale impropre. On explicitera les points où l'intégrale est indéfinie avant de donner la méthode de résolution. En présence d'un paramètre on donnera les valeurs du paramètre pour lesquelles l'intégrale converge.

Exercice 1* $\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt$

Exercice 2*

i) $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$;

ii) $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$;

iii) $\int_0^{\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$.

Indication : Écrire la dernière intégrale comme la somme des intégrales sur $[n\pi, (n+1)\pi]$.

Exercice 3*

i) $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$;

ii) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour toute valeur adéquate de x (que l'on précisera).

Exercice 4*

i) $\int_0^1 \frac{\log x}{x} dx$;

ii) $\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x} dx$;

Exercice 5* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$;

Indication : Étudier l'intégrale correspondante.

Exercice 6* $\int_0^1 (\log t)^2 dt$.

Exercice 7* $\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}$.

Exercice 8* $\int_0^{\infty} \frac{\sin 1/t}{\sqrt{t}} dt$.