Maths Avancées 2

Les exercices marqués d'une étoile ont été traités en cours.
Dans les exercices qui suivent, lorsque l'on demande la valeur d'une série, cela signifie qu'il faut :

1. étudier la convergence de la série : dans le cas où la série dépend de un ou plusieurs paramètres, bien spécifier les valeurs de ceux-ci pour lesquelles la série converge. Il faut également dire si la convergence est absolue ou non.
2. Calculer explicitement sa limite dans le(s) cas où elle converge.

Si par contre l'énoncé demande simplement *d'étudier la convergence* une série, on se contentera de traiter 1).

Exercice 1* Valeur de $\sum_{n\geq p} x^n$ où p est un entier positif.

Exercice 2* Valeur de $\sum_{n\geq 0}(-1)^n/n!$

Exercice 3* Valeur de $\sum_{n\geq 1}(x^n+(-1)^n)/n$.

Exercice 4* Valeur de $\sum_{n\geq 1} 1/n(n+1)$.

Exercice 5 En utilisant l'exo précédent étudier $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$.

Exercice 6* Valeur de $\sum_{n\geq 2} 1/(n^2-1)$.

Exercice 7 Valeur de $\sum_{n\geq 0} x^n \sin(n\theta)$.

Exercice 8*

i) Valeur de $\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$.
Indication : calculer $(1-x)\sum_{n=0}^{p}(n+1)x^n$.

ii) Valeur de $\sum_{n\geq 0}\binom{n+k}{n}x^n$.
Indication : Montrer par récurrence sur k que, lorsque la série converge, elle est égale à $1/(1-x)^{k+1}$.

Exercice 9 Soit $\alpha > 0$; étudier la série $\sum_{n\geq 1} x^n/n^\alpha$.

Exercice 10* Dire lesquelles des affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant sa réponse.

i) Si $u_n > 0$ tend vers 0 en décroissant alors $\sum u_n$ converge.

ii) Si $u_n > 0$ et $\sum u_n$ converge alors u_{n+1}/u_n a une limite strictement inférieur à 1.

iii) Si $u_n > 0$ et $\sum u_n$ converge alors u_n est décroissante à partir d'un certain rang.

iv) Si $u_n > 0$ et $\sum u_n$ converge alors $\sum u_n^2$ converge.

v) Si $\lim(-1)^n n^2 u_n = 1$ alors $\sum u_n$ converge.

vi) Si $\lim(-1)^n n u_n = 1$ alors $\sum u_n$ converge.

Exercice 11* Étudier les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Exercice 12* Étudier les séries $\sum_{n\geq 0} e^{-n}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{8}{5+7i}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n-1}$, $\sum_{n\geq 1} \sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2+4}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^3+4}$.

Exercice 13* Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs.

i) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ssi la série $\sum_{n\geq 0} 2^n u_{2^n}$ converge.

ii) En déduire que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\log n}$ diverge.

Exercice 14* Valeurs des séries $\sum_{n\geq 0} r^n \sin n\theta$ et $\sum_{n\geq 0} r^n \cos n\theta$ pour $0 \leq r < 1$ et $0 \leq \theta < 2\pi$.

Exercice 15* Étudier les séries $\sum_{n\geq 0} n! a^n$, $\sum_{n\geq 0} \sqrt{2^n+1}(\log n) a^n$, $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{4^n n!}$ selon les valeurs du paramètre complexe a.

Exercice 16* Étudier les séries $\sum_{n\geq 0} (\frac{nx}{2n+1})^n$, $\sum_{n\geq 0} (1+\frac{x}{n})^{n^2}$ selon les valeurs du paramètre réel x.

Exercice 17* Étudier les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^\alpha}$, $\sum_{n\geq 1} 1 - \cos\frac{1}{n}$, $\sum_{n\geq 1} \log\cos\frac{1}{n}$.

Exercice 18* Étudier la série $\sum_{n\geq 0} (n^2+1)^\alpha - (n^2-1)^\alpha$ selon les valeurs du paramètre réel α.